

問題. 以下の関数 f について, 逆関数が存在するかどうかについて調べ, 解答せよ.

1. $f: X \rightarrow Y, X = Y = [1, 2],$

$$y = f(x) = |x|$$

2. $f: X \rightarrow Y, X = [-2, 2], Y = [-1, 1],$

$$y = f(x) = \begin{cases} x - 2, & (x \geq 1), \\ -x, & (-1 \leq x < 1). \\ x + 2, & (x < -1). \end{cases}$$

問題. 以下の関数 f について, 逆関数が存在するかどうかについて調べ, 解答せよ.

3. $f : X \rightarrow Y, X = [0, 1], Y = \mathbb{R},$
 $y = f(x) = |x^2 - 1|$

4. $f : X \rightarrow Y, X = [0, 2], Y = [-1, 1],$
 $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & (x \geq 1), \\ x^2 - 1, & (-1 \leq x < 1). \end{cases}$
 $-x^2 - 4x - 3, \quad (x < -1).$

問題. 以下の関数 f について, 「 f が単射であるか」「 f が全射であるか」について調べ, 解答せよ.

1. $f: X \rightarrow Y, X = Y = \mathbb{R},$
 $y = f(x) = -x + 1$

2. $f: X \rightarrow Y, X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, Y = \mathbb{R},$
 $y = f(x) = \frac{1}{x}$

問題. 以下の関数 f について, 「 f が単射であるか」「 f が全射であるか」について調べ, 解答せよ.

3. $f : X \rightarrow Y, X = Y = \mathbb{R},$
$$y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & (x \geq 0), \\ x^2 + 2x, & (x < 0). \end{cases}$$

4. $f : X \rightarrow Y, X = Y = \mathbb{R},$
$$y = f(x) = x^2 - 2x - 3$$

問題. A, B, C を集合とするとき, 以下を証明せよ.

自作. $A \subseteq A \cup B$

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. $A \cap (A \cup B) = A$

7. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

問題. A, B, C を集合とするとき, 以下を証明せよ.

自作. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

挑戦問題. $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C)$

問題. 以下の論理式の真偽を判定せよ.

1. $\forall x((x^2 - 3x + 2 > 0) \rightarrow (x < 1))$

2. $\exists y((y^2 + 5y - 6 < 0) \rightarrow (y < 1))$

問題. 以下の文章を論理式で表せ.

1. $x^2 - x = 4$ となる正の数 x が存在する.

2. $x^2 + 1 = 0$ となる数 x は存在しない.

3. 任意の正の数 ε に対し, 正の数 δ が存在し, $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ を満たす.

問題. 以下の論理式 A の双対 A^* を求め, $A^{**} = A$ となる事を確認せよ.

1. $A = p \wedge (q \vee r)$

2. $A = p \rightarrow q$

3. $A = p \vee \neg q \wedge (r \vee s \vee t)$

4. $A = p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

問題. 以下の命題を論理式の変形による方法で証明せよ.

1. $\models A \rightarrow B$ ならば $\models B^* \rightarrow A^*$

2. $\models A \equiv B$ ならば $\models A^* \equiv B^*$

問題. A, B を論理式とするとき, 以下はすべてトートロジーである事を証明せよ.

7. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$

9. $\neg\neg A \equiv A$

8. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

10. $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$

問題. A, B, C を論理式とするとき, 以下はすべてトートロジーであることを証明せよ.

5. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

6. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$