解析学:　講義補足プリント

定理 5.13 (Fubini の定理)　$-\infty < a < b < \infty$ とし, 以下を仮定する.

- $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 連続,　$h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, and $g(x) \leqq h(x)$, $\forall x \in [a,b]$.
- $D = \left\{ \ (x,y) \ \middle| \ g(x) \leqq y \leqq h(x),\ a \leqq x \leqq b \ \right\}$.
- $f : D \mapsto \mathbb{R}$ 連続 $(z = f(x,y))$.

このとき以下が成立する.

(I) $G(x) = \displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$, $\forall x \in [a,b]$ とすると, G は $[a,b]$ 上の連続関数となる.

(II) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b G(x)\,dx \left(= \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \right)$.

(I) の証明.　関数 $y = g(x)$, $y = h(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ で一様連続であり, 更に関数 $z = f(x,y)$ は有界閉集合 D 上で一様連続であるので,

- $\exists M_0 > 0,$ s.t. $|f(x,y)| + |g(x)| + |h(x)| \leqq M$, $\forall (x,y) \in D$.
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, s.t. $\Big[(x,y) \in D$, $|k| < \delta_\varepsilon$, and $x + k \in [a,b]$
  $\Longrightarrow$ $|f(x+k,y) - f(x,y)| < \varepsilon$, $|g(x+k) - g(x)| < \varepsilon$, and $|h(x+k) - h(x)| < \varepsilon\Big]$.

従って, $x \in [a,b]$, $|k| < \delta_\varepsilon$, $x + k \in [a,b]$ ならば:

$$
\begin{aligned}
|G(x+k) - G(x)| &= \left| \int_{g(x+k)}^{h(x+k)} f(x+k,y)\,dy - \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right| \\
&\leqq \left| \int_{g(x)}^{h(x)} \big(f(x+k,y) - f(x,y) \big)\,dy \right| + \left| \int_{h(x)}^{h(x+k)} f(x+k,y)\,dy \right| + \left| \int_{g(x)}^{g(x+k)} f(x+k,y)\,dy \right| \\
&\leqq \int_{g(x)}^{h(x)} |f(x+k,y) - f(x,y)|\,dy + \left| \int_{h(x)}^{h(x+k)} |f(x+k,y)|\,dy \right| + \left| \int_{g(x)}^{g(x+k)} |f(x+k,y)|\,dy \right| \\
&< \int_{g(x)}^{h(x)} \varepsilon\,dy + \left| \int_{h(x)}^{h(x+k)} M\,dy \right| + \left| \int_{g(x)}^{g(x+k)} M\,dy \right| \\
&= \varepsilon |h(x) - g(x)| + M\big(|h(x+k) - h(x)| + |g(x+k) - g(x)| \big) \\
&\leqq 4M\varepsilon.
\end{aligned}
$$

よって, G は $[a,b]$ 上で連続である.　□

(II) の証明. 証明には以下の記号を用いる.

- $f^*: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ f の $\mathbb{R}^2$ への拡張, 即ち:
$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{if } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{if } (x,y) \notin D. \end{cases}$$
- $-\infty < c < d < \infty$, s.t. $R = [a,b] \times [c,d] \supset D$ (例: $c = -M$, $d = M$).
- Δ: R の任意の分割, 即ち,
Δ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_j < \cdots < y_m = d$ $(n, m \in \mathbb{N})$.
- $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $\forall j \in \{1, \cdots, m\}$,
$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $M_{ij} = \max\limits_{(x,y)\in R_{ij}} f^*(x,y)$, $m_{ij} = \min\limits_{(x,y)\in R_{ij}} f^*(x,y)$.
- $S(\Delta, f^*) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$,
$s(\Delta, f^*) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

このとき, 以下の議論が成立する.

$\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $\forall j \in \{1, \cdots, m\}$,
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} m_{ij}\, dy \right) dx \leqq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(x,y)\, dy \right) dx \leqq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} M_{ij}\, dy \right) dx$$

$\Longrightarrow$ $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $\forall j \in \{1, \cdots, m\}$,
$$m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leqq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(x,y)\, dy \right) dx \leqq M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$\Longrightarrow\ s(\Delta, f^*) \leqq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(x,y)\, dy \right) dx \leqq S(\Delta, f^*).$$

$z = f(x,y)$ が有界閉集合 D で連続であるという仮定から, f は D 上で可積分となるので (定理 5.3), 重積分の定義により,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\, dxdy &= \sup_\Delta s(\Delta, f^*) \\ &\leqq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(x,y)\, dy \right) dx \\ &\leqq \inf_\Delta S(\Delta, f^*) = \iint_D f(x,y)\, dxdy, \end{aligned}$$

即ち,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(x,y)\,dy\right)dx. \tag{1}$$

更に, f^* の性質から以下が成り立つ:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(x,y)\,dy\right)dx &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(x,y)\,dy\right)dx \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b G(x)\,dx. \end{aligned} \tag{2}$$

以上 (1), (2) を併せれば, (II) が示される. □