教材研究 (第１回)

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

問. 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ).

(1) $y' = 2(x-1)(y+2)$

$$\int \frac{dy}{y+2} = 2\int (x-1)\,dx$$

$$\log(y+2) = x^2 - 2x + C$$

$$= \log\left(e^C \cdot e^{x^2-2x}\right)$$

(C：定数)

$$\therefore\ y+2 = k e^{x^2-2x}$$

$$\Longleftrightarrow\ y = -2 + k e^{x^2-2x}$$

(k：定数)

(2) $y' = y(y-1)$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int 1\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} = x + C$$

$$\log(y-1) - \log y = \log(e^C \cdot e^x)$$

$$\log\left(\frac{y-1}{y}\right) = \log(e^C \cdot e^x)$$

$$\therefore\ \frac{y-1}{y} = k e^x$$

$$\Longleftrightarrow\ y = \frac{1}{1-ke^x} \quad (k：定数)$$

(3) $(y-2)^2 y' = (x+2)^3$

$$\int (y-2)^2\,dy = \int (x+2)^3\,dx$$

$$\frac{1}{3}(y-2)^3 = \frac{1}{4}(x+2)^4 + C$$

(C：定数)

(4) $x(x-1)y' = y$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x(x-1)}$$

$$\log y = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x}$$

$$= \log(x-1) - \log x + C$$

$$= \log\left(e^C \cdot \frac{x-1}{x}\right)$$

(C：定数)

$$y = k \cdot \frac{x-1}{x} \quad (k：定数)$$

教材研究 （第2回）

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

問 1. 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ).

(2) $y' = \frac{y}{x} - \tan\frac{y}{x}$

$u = \frac{y}{x}$ とおくと

$y' = (xu)' = u + xu'$

$= u - \tan u$

$\therefore \frac{du}{dx} = -\frac{\tan u}{x}$

$\int \frac{du}{\tan u} = -\int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{\cos u}{\sin u} du = -\int \frac{dx}{x}$

$\log(\sin u) = -\log x + C$

$= \log \frac{e^C}{x}$ (C:定数)

$\therefore \underline{\sin\frac{y}{x} = \frac{k}{x}}$ (k:定数) △

(3) $y' = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$

$u = \frac{y}{x}$ とおくと

$y' = (xu)' = u + xu' = \frac{1-u}{1+u}$

$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{1-u}{1+u} - \frac{u+u^2}{1+u}\right)$

$= -\frac{1}{x}\frac{u^2+2u-1}{u+1}$

$\int \frac{2(u+1)}{u^2+2u-1} du = -\int \frac{2}{x} dx$

$\log(u^2+2u-1) = -2\log x + C$

$= \log \frac{e^C}{x^2}$

$\therefore \frac{y^2}{x^2} + 2\left(\frac{y}{x}\right) - 1 = \frac{k}{x^2}$

又は

$y^2 + 2xy - x^2 = k$

(k:定数)

問 2. 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ).

(1) $y' - 2xy = 2x$

$(e^{-x^2}y)' = 2xe^{-x^2}$

$e^{-x^2}y = \int 2xe^{-x^2} dx$

$y = e^{x^2}(-e^{-x^2} + C)$

$= -1 + Ce^{x^2}$

(C:定数)

(3) $y' + y\sin x = e^{\cos x}$

$(e^{-\cos x}y)' = e^{\cos x}\cdot e^{-\cos x} = 1$

$e^{-\cos x}y = \int 1\, dx$

$y = e^{\cos x}(x + C)$

(C:定数)

教材研究 （第3回）

学籍番号 氏名

問 1. 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ).

(1) $y' + y = xy^3$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} = x$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(y^{-2})' + (y^{-2}) = x$$

$$\Rightarrow (e^{-2x}y^{-2})' = -2xe^{-2x}$$

$$\Rightarrow e^{-2x}y^{-2} = \int x(e^{-2x})'dx$$

$$= xe^{-2x} - \int e^{-2x}dx$$

$$= xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

(C：定数)

$$\Rightarrow y^{-2} = \left(x + \frac{1}{2}\right) + Ce^{2x}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right) + Ce^{2x}} \quad (C：定数)$$

(2) $xy' + y = x\sqrt{y}$

$$\Rightarrow x\frac{y'}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} = x$$

$$\Rightarrow 2x(\sqrt{y})' + \sqrt{y} = x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{y})' + \frac{1}{2x}\sqrt{y} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{y})' + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}\sqrt{y})' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

(C：定数)

$$\Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x + \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}x + \frac{C}{\sqrt{x}}\right)^2 \quad (C：定数)$$

問 2. 完全微分形であることを確かめ, 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ).

(1) $(2x^3 + 2xy)dx + (x^2 + 2y^3)dy = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}(2x^3+2xy) = 2x \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2+2y^3) = 2x \end{cases}$$

よって与式は，ポテンシャル：

$$F(x,y) = \int(2x^3+2xy)\,dx + \int\left((x^2+2y^3) - \frac{\partial}{\partial y}\int(2x^3+2xy)\,dx\right)dy$$

$$= \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} + x^2y$$

に対する完全微分形となるので，

その解は，

$$\frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} + x^2y = C \quad (定数)$$

として表される

(2) $(2x + \sin y)dx + x\cos y\,dy = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}(2x+\sin y) = \cos y \\ \frac{\partial}{\partial x}(x\cos y) = \cos y \end{cases}$$

よって与式は，ポテンシャル：

$$F(x,y) = \int(2x+\sin y)\,dx + \int\left(x\cos y - \frac{\partial}{\partial y}\int(2x+\sin y)\,dx\right)dy$$

$$= x^2 + x\sin y$$

に対する完全微分形となるので，

その解は，

$$x^2 + x\sin y = C \quad (定数)$$

と表される.

教材研究（第４回）

学籍番号　　　　　　氏名

問 1. 次の初期値問題を解け.

(1) $y'' - 4y' + 3y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -5$

特性方程式：

$t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3) = 0$

$t = 1, 3$

一般解： $y = Ae^{x} + Be^{3x}$

（A, B：定数）

$y' = Ae^{x} + 3Be^{3x}$

$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = A + B = 1 \\ y'(0) = A + 3B = -5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -3 \end{cases}$

$\therefore\ y = 4e^{x} - 3e^{3x}$

(2) $y'' - 4y' + 5y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

特性方程式：

$t^2 - 4t + 5 = 0,\quad t = 2 \pm i$

一般解： $y = Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$

（A, B：定数）

$y' = (2A+B)e^{2x}\cos x + (-A+2B)e^{2x}\sin x$

$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = A = 1 \\ y'(0) = 2A + B = 2 + B = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$

$\therefore\ y = e^{2x}\cos x - 2e^{2x}\sin x$

(3) $y'' - 4y' + 4y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

特性方程式：

$t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$

$t = 2$（重解）

一般解： $y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$

（A, B：定数）

$y' = (2A+B)e^{2x} + 2Bxe^{2x}$

$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = A = 1 \\ y'(0) = 2A + B = 2 + B = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$

$\therefore\ y = e^{2x} - 2xe^{2x}$

(4) $2y'' + 12y' = 0 \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 6$

特性方程式：

$t^2 + 6t = t(t+6) = 0$

$t = 0, -6$

一般解： $y = A + Be^{-6x}$

（A, B：定数）

$y' = -6Be^{-6x}$

$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = A + B = 0 \\ y'(0) = -6B = 6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$

$\therefore\ y = 1 - e^{-6x}$

教材研究 （第５回）

学籍番号 　　　　　　　　氏名

問. 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ).

(1) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

特性方程式：

$t^3 - 6t^2 + 11t - 6$

$= (t-1)(t-2)(t-3) = 0$

$t = 1, 2, 3$ （すべて１重解）

よって一般解は

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$

（C_k：定数，$k = 1, 2, 3$）

(2) $y''' - y'' - y' + y = 0$

特性方程式：

$t^3 - t^2 - t + 1$

$= (t+1)(t-1)^2 = 0.$

$t = -1$（１重解），1（２重解）

よって一般解は，

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 x e^{x}$

（C_k：定数，$k = 1, 2, 3$）

(3) $y'''' + 6y'' + 25y = 0$

特性方程式：

$t^4 + 6t^2 + 25 = 0$

$t^2 = -3 \pm 4i$

$t = \pm(1+2i),$

$\pm(1-2i)$

（すべて１重解）

よって一般解は

$y = C_1 e^{x}\cos 2x + C_2 e^{x}\sin 2x$

$+ C_3 e^{-x}\cos 2x + C_4 e^{-x}\sin 2x$

（C_k：定数，$k = 1, 2, 3, 4$）

(4) $y^{(8)} - 32y'''' + 256y = 0$

特性方程式：

$t^8 - 32t^4 + 256$

$= (t^4 - 16)^2 = (t^2 - 4)^2 (t^2 + 4)^2 = 0$

$t^2 = \pm 4$ となるので．

$t = \pm 2, \pm 2i$ （すべて２重解）

よって一般解は，

$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

$+ C_3 e^{-2x} + C_4 x e^{-2x}$

$+ C_5 \cos 2x + C_6 \sin 2x$

$+ C_7 x \cos 2x + C_8 x \sin 2x$

（C_k：定数，$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$）

教材研究 （第6回）

学籍番号　　　　　　　　　氏名

Text 演習問題 7.1. 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ).

(1) $y'' - y' - 2y = 4x^2$ —— Ⓐ

付随する同次方程式は:

$y'' - y' - 2y = 0$ —— Ⓐ*

Ⓐ* の特性方程式は:

$t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2) = 0$

$\therefore\ t = -1, 2$

よって Ⓐ* の一般解 y^* は:

$y^*(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$

次に, Ⓐ の特殊解 $y_0(x)$ を

$y_0(x) = C_0x^2 + C_1x + C_2$

とおくと

$y_0'' - y_0' - 2y_0$

$= 2C_0 - (2C_0x + C_1) - 2(C_0x^2 + C_1x + C_2)$

$= -2C_0x^2 - 2(C_0 + C_1)x + 2C_0 - C_1 - 2C_2$

$= 4x^2$

$$\therefore \begin{cases} C_0 = -2 \\ C_1 = -C_0 = 2 \\ C_2 = \frac{1}{2}(2C_0 - C_1) \\ \quad = 1 \end{cases}$$

以上より, Ⓐ の一般解 $y(x)$ は:

$y(x) = y_0(x) + y_*(x)$

$= (-2x^2 + 2x + 1) + Ae^{-x} + Be^{2x}$

$(A, B$: 定数$)$

(4) $y'' - y' - 2y = 6e^{2x}$ —— Ⓐ

付随する同次方程式の一般解 y^* は:

$y^*(x) = Ae^{x} + Be^{2x}$

である.

次に Ⓐ の特殊解 $y_0(x)$ を

$y_0(x) = Cxe^{2x}$

とおくと

$y_0'(x) = Ce^{2x} + 2Cxe^{2x} = (2Cx + C)e^{2x}$

$y_0''(x) = 2Ce^{2x} + 2(2Cx + C)e^{2x}$

$= (4Cx + 4C)e^{2x}$

$\therefore\ y_0'' - y_0' - 2y_0$

$= ((4Cx + 4C) - (2Cx + C) - 2Cx)e^{2x}$

$= 3Ce^{2x} = 6e^{2x}$

$\therefore\ C = 2$

以上より Ⓐ の一般解 $y(x)$ は:

$y(x) = y_0(x) + y^*(x)$

$= 2xe^{2x} + Ae^{-x} + Be^{2x}$

$(A, B$: 定数$)$

(裏面に続く)

Text 演習問題 7.1. 次の微分方程式を解け (一般解を求めよ).

(5) $y'' - y' - 2y = 20\sin 2x$ —— Ⓐ

付随する同次方程式の一般解 $y^*(x)$ は：

$$y^*(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$$

(A, B：定数)

である. ここで Ⓐの特殊解 $y_0(x)$ を：

$$y_0(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

とおくと

$$y_0' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x$$

$$y_0'' = -4C_1\cos 2x - 4C_2\sin 2x$$

よって

$$y_0'' - y_0' - 2y_0$$

$$= (-4C_1 - 2C_2 - 2C_1)\cos 2x + (-4C_2 + 2C_1 - 2C_2)\sin 2x$$

$$= (-6C_1 - 2C_2)\cos 2x + (2C_1 - 6C_2)\sin 2x$$

$$= 20\sin 2x$$

$$\therefore \begin{cases} C_1 - 3C_2 = 10 \\ -3C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -3 \end{cases}$$

以上より Ⓐの一般解 $y(x)$ は：

$$y(x) = \cos 2x - 3\sin 2x + Ae^{-x} + Be^{2x}$$

(A, B：定数)

(8) $y'' - 2y' + 2y = 3e^x\cos 2x$ —— Ⓐ

付随する同次方程式は：

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \quad \text{—— Ⓐ}^*$$

Ⓐ*の特性方程式は：

$$t^2 - 2t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \pm i$$

よって Ⓐ*の一般解 $y^*(x)$ は：

$$y^*(x) = e^x(A\cos x + B\sin x)$$

(A, B：定数)

次に Ⓐの特殊解 $y_0(x)$ を：

$$y_0(x) = e^x(C_0\cos 2x + C_1\sin 2x)$$

とおくと

$$y_0' = e^x(C_0\cos 2x + C_1\sin 2x) + 2e^x(-C_0\sin 2x + C_1\cos 2x)$$

$$= e^x((C_0 + 2C_1)\cos 2x + (-2C_0 + C_1)\sin 2x)$$

$$y_0'' = e^x((C_0 + 2C_1)\cos 2x + (-2C_0 + C_1)\sin 2x) + e^x(-2(C_0 + 2C_1)\sin 2x + 2(-2C_0 + C_1)\cos 2x)$$

$$= e^x((-3C_0 + 4C_1)\cos 2x + (-4C_0 - 3C_1)\sin 2x)$$

$$y_0'' - 2y_0' + 2y_0$$

$$= e^x(-3C_0\cos 2x - 3C_1\sin 2x)$$

$$= 3e^x\cos 2x$$

$$\therefore \begin{cases} C_0 = -1 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

以上より Ⓐの一般解 $y(x)$ は：

$$y(x) = -e^x\cos 2x + e^x(A\cos x + B\sin x)$$

教材研究 （第7回）

学籍番号　　　　　　　　氏名

次の各行列 A の指数関数 e^{tA} を計算せよ.

(1) $A=\begin{bmatrix}6&3\\1&4\end{bmatrix}$

固有値：

$\lambda^2-10\lambda+21=(\lambda-3)(\lambda-7)=0$

$\lambda=3, 7.$

固有ベクトル：

$\boxed{\lambda=3\text{ のケース}}$

$\begin{bmatrix}6-3&3\\1&4-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix}3&3\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow p_2=-p_1$

$\therefore \begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$\boxed{\lambda=7\text{ のケース}}$

$\begin{bmatrix}6-7&3\\1&4-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix}-1&3\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow q_1=3q_2$

$\therefore \begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$

$\mathbb{P}=\begin{bmatrix}1&3\\-1&1\end{bmatrix}, \mathbb{J}=\begin{bmatrix}3&\\&7\end{bmatrix}$ とおく

$\mathbb{P}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-3\\1&1\end{bmatrix}$

$e^{t\mathbb{A}}=e^{\mathbb{P}(t\mathbb{J})\mathbb{P}^{-1}}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&3\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{3t}&\\&e^{7t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\1&1\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}e^{3t}&3e^{7t}\\-e^{3t}&e^{7t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\1&1\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}e^{3t}+3e^{7t}&-3e^{3t}+3e^{7t}\\-e^{3t}+e^{7t}&3e^{3t}+e^{7t}\end{bmatrix}$

$=\frac{e^{3t}}{4}\begin{bmatrix}1&-3\\-1&3\end{bmatrix}+\frac{e^{7t}}{4}\begin{bmatrix}3&3\\1&1\end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}$

固有値：

$\lambda^2-4\lambda+5=0 \quad \lambda=2\pm i$

固有ベクトル （$\lambda=2+i$ とする）

$\begin{bmatrix}1-(2+i)&2\\-1&3-(2+i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix}-1-i&2\\-1&1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow p_1=(1-i)p_2$

$\therefore \begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-i\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$

$\mathbb{P}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$ とおくと $\mathbb{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}$

$\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1&3\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2&\\&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}&1\\-1&\end{bmatrix}$

$e^{t\mathbb{A}}=\mathbb{P}e^{\begin{bmatrix}2t&\\&2t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}&t\\-t&\end{bmatrix}}\mathbb{P}^{-1}$

$=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t}&\\&e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}e^{2t}&-e^{2t}\\e^{2t}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin t&\cos t+\sin t\\-\cos t&\cos t-\sin t\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}e^{2t}(\cos t-\sin t)&2e^{2t}\sin t\\-e^{2t}\sin t&e^{2t}(\cos t+\sin t)\end{bmatrix}$

$=e^{2t}\cos t\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+e^{2t}\sin t\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}$

(裏面に続く)

Text 演習問題 9.1. 次の連立微分方程式を解け.

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 7y \end{cases}$

$$\mathbb{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},\ \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ とおく}$$

$$\lambda^2 - 11\lambda + 30 = (\lambda-5)(\lambda-6) = 0$$

$$\lambda = 5, 6$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ \mathbb{J} = \begin{bmatrix} 5 & \\ & 6 \end{bmatrix} \text{ とおく}$$

$$\mathbb{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{P} e^{t\mathbb{J}} \mathbb{P}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{5t} & \\ & e^{6t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{5t} & e^{6t} \\ -e^{5t} & -e^{6t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{5t} - e^{6t} & 2e^{5t} - 2e^{6t} \\ -e^{5t} + e^{6t} & -e^{5t} + 2e^{6t} \end{bmatrix}$$

$$= e^{5t}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + e^{6t}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解の公式から

$$\mathbb{x}(t) = e^{t\mathbb{A}}\mathbb{C} \quad \left(\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \text{ 定数のベクトル}\right)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{5t}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + e^{6t}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{5t}\begin{bmatrix} 2C_1 + 2C_2 \\ -C_1 - C_2 \end{bmatrix} + e^{6t}\begin{bmatrix} -C_1 - 2C_2 \\ C_1 + 2C_2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{5t}\begin{bmatrix} 2A \\ -A \end{bmatrix} + e^{6t}\begin{bmatrix} -B \\ B \end{bmatrix}$$

(ただし $A(=C_1+C_2),\ B(=C_1+2C_2)$：任意定数)

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}$

$$\mathbb{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},\ \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ とおく}$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0,\ \lambda = 4 \pm i$$

$$\begin{bmatrix} 6-(4+i) & -1 \\ 5 & 2-(4+i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ とおくと } \mathbb{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{P} e^{\begin{bmatrix} 4t & \\ & 4t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}} \mathbb{P}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{4t}\cos t & e^{4t}\sin t \\ -e^{4t}\sin t & e^{4t}\cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{4t}\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ 2\cos t - \sin t & 2\sin t - \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{4t}\begin{bmatrix} \cos t + 2\sin t & -\sin t \\ 3\sin t & \cos t - 2\sin t \end{bmatrix}$$

$$= e^{4t}\cos t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + e^{4t}\sin t\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

解の公式から $\left(\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \text{ 定数のベクトル}\right)$

$$\mathbb{x}(t) = e^{t\mathbb{A}}\mathbb{C}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{4t}\cos t\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + e^{4t}\sin t\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{4t}\cos t\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + e^{4t}\sin t\begin{bmatrix} 2C_1 - C_2 \\ 3C_1 - 2C_2 \end{bmatrix}$$