応用数学特論 IV 補足プリント３

このプリントを通し, $[a,b]$ を与えられた閉区間 $(-\infty < a < b < \infty)$ とする.

1 積分におけるヘルダー (Hölder) の不等式

この節では, 次の不等式の証明を与える.

ヘルダーの不等式

$$\begin{cases} \bullet\ 1 < p, q < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \left(q = \dfrac{p}{p-1},\ p = \dfrac{q}{q-1} \right) \\ \bullet\ x = x(t) \in L^p[a,b],\ y = y(t) \in L^q[a,b], \end{cases} \tag{1}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b |x(t)y(t)|\ dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\ dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q\ dt \right)^{1/q}.$$

証明 簡単のため,

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p\ dt \right)^{1/p},\quad \|y\|_q = \left(\int_a^b |y(t)|^q\ dt \right)^{1/q} \tag{2}$$

と表記する. 証明は次の 2 つの場合に分けて行う.

(Case 1) $\|x\|_p \ne 0$ and $\|y\|_q \ne 0$ である場合.

ヤングの不等式から,

$$\frac{|x(t)y(t)|}{\|x\|_p \|y\|_q} \le \frac{1}{p\|x\|_p^p}|x(t)|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q}|y(t)|^q \quad (\text{a.e. } t \in [a,b]).$$

両辺を区間 $[a,b]$ 上で積分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \int_a^b |x(t)y(t)|\ dt &\le \frac{1}{p\|x\|_p^p} \int_a^b |x(t)|^p\ dt + \frac{1}{q\|y\|_q^q} \int_a^b |y(t)|^q\ dt \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

したがって,

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\ dt \le \|x\|_p \|y\|_q = \left(\int_a^b |x(t)|^p\ dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q\ dt \right)^{1/q}.$$

(Case 2) $\|x\|_p = 0$ or $\|y\|_q = 0$ である場合.

仮に $\|x\|_p = 0$ とすると,

$$0 \leq \int_a^b |x(t)|^p \ dt = \|x\|_p^p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) = 0, \ (\text{a.e. } t \in [a,b]).$$

したがって,

$$\begin{aligned}\int_a^b |x(t)y(t)| \ dt &= \int_a^b 0 \cdot |y(t)| \ dt = 0 = \|x\|_p \|y\|_q \\ &= \left(\int_a^b |x(t)|^p \ dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q \ dt\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

一方, $\|y\|_q = 0$ のときも上記と同様の手法で証明できる. ■

2 積分におけるミンコフスキー (Minkowski) の不等式

ミンコフスキーの不等式

$$1 \leq p < \infty, \ \ x = x(t), \, y = y(t) \in L^p[a,b]$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p \ dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p \ dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p \ dt\right)^{1/p}. \quad (3)$$

証明 証明は次の 2 つの場合に分けて行う.

(Case 1) $p = 1$ である場合.

3 角不等式から,

$$\int_a^b |x(t)+y(t)| \ dt \leq \int_a^b (|x(t)| + |y(t)|) \ dt = \int_a^b |x(t)| \ dt + \int_a^b |y(t)| \ dt.$$

これは, 不等式 (3) の $p = 1$ の場合に他ならない.

(Case 2) $p > 1$ である場合.

$\|x\|_p = 0$ ($\|y\|_p = 0$) の場合は,

$$x(t) = 0, \text{ a.e. } t \in [a,b] \ (y(t) = 0, \text{ a.e. } t \in [a,b]),$$

となるので, 不等式 (3) は等式の形で得られる.

これ以降, $\|x\|_p \neq 0$ and $\|y\|_p \neq 0$ と仮定し, $q = \dfrac{p}{p-1}$ とする $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$.

3 角不等式から,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b |x(t)+y(t)|^p\ dt \\
&= \int_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1}|x(t)+y(t)|\ dt \\
&\leq \int_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1}(|x(t)|+|y(t)|)\ dt \\
&= \int_a^b |x(t)||x(t)+y(t)|^{p/q}\ dt + \int_a^b |y(t)||x(t)+y(t)|^{p/q}\ dt
\end{aligned}
$$

ここで, ヘルダーの不等式を用いると,

$$
\begin{aligned}
I &\leq \left(\int_a^b |x(t)|^p\ dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b \left(|x(t)+y(t)|^{p/q}\right)^q\ dt\right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\int_a^b |y(t)|^p\ dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b \left(|x(t)+y(t)|^{p/q}\right)^q\ dt\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\ dt\right)^{1/q} \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right).
\end{aligned}
$$

両辺を $\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\ dt\right)^{1/q}$ で割り算して整理すると,

$$
\begin{aligned}
\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\ dt\right)^{1/p} &= I \cdot \left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\ dt\right)^{-1/q} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \\
&= \left(\int_a^b |x(t)|^p\ dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\ dt\right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

■