応用数学特論 IV 補足プリント 2

1　級数におけるヘルダー (Hölder) の不等式

この節では, 次の不等式の証明を与える.

ヘルダーの不等式

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ 1 < p, q < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \left(q = \dfrac{p}{p-1},\ p = \dfrac{q}{q-1} \right) \\ \bullet\ x = \{x_n\} \in \ell_p,\ y = \{y_n\} \in \ell_q, \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}.$$

証明　簡単のため,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}, \quad \|y\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q} \tag{2}$$

と表記する. 証明は次の 2 つの場合に分けて行う.

(Case 1) $\|x\|_p \neq 0$ and $\|y\|_q \neq 0$ である場合.

ヤングの不等式から,

$$\frac{|x_n y_n|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p\|x\|_p^p} |x_n|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q} |y_n|^q \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

よって,

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \frac{1}{p\|x\|_p^p} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

これより,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}.$$

(Case 2) $\|x\|_p = 0$ or $\|y\|_q = 0$ である場合.

仮に $\|x\|_p = 0$ とすると,

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \|x\|_p^p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

したがって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot |y_n| = 0 = \|x\|_p \|y\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}.$$

一方, $\|y\|_q = 0$ のときも上記と同様の手法で証明できる. ■

2 級数におけるミンコフスキー (Minkowski) の不等式

ミンコフスキーの不等式

$$1 \leq p < \infty,\ x = \{x_n\},\ y = \{y_n\} \in \ell_p$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p}. \qquad (3)$$

証明 証明は次の 2 つの場合に分けて行う.

(Case 1) $p = 1$ である場合.

3 角不等式から,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \big(|x_n| + |y_n| \big) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|.$$

これは, 不等式 (3) の $p = 1$ の場合に他ならない.

(Case 2) $p > 1$ である場合.

$\|x\|_p = 0$ ($\|y\|_p = 0$) の場合は,

$$x_n = 0\ (y_n = 0),\ n = 1, 2, 3, \cdots,$$

となるので, 不等式 (3) は等式の形で得られる.

これ以降, $\|x\|_p \neq 0$ and $\|y\|_p \neq 0$ と仮定し, $q = \dfrac{p}{p-1}$ とする $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \right)$.

3 角不等式から,

$$\begin{aligned} S \;:=\; & \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p-1} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p-1} (|x_n| + |y_n|) \\ = \; & \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |x_n + y_n|^{p/q} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| |x_n + y_n|^{p/q}. \end{aligned}$$

ここで, ヘルダーの不等式を用いると,

$$
\begin{aligned}
S &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n+y_n|^{p/q}\right)^q\right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n+y_n|^{p/q}\right)^q\right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p\right)^{1/q} \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right).
\end{aligned}
$$

両辺を $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p\right)^{1/q}$ で割り算して整理すると,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p\right)^{1/p} &= S \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p\right)^{-1/q} \le \|x\|_p + \|y\|_p \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

■