応用数学特論 IV 補足プリント１

このプリントを通し, X を集合 (空間), Φ をスカラーの集合とする ($\Phi = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$).

定義１．(線形空間の定義)

X : 線形空間 (ベクトル空間)

$\overset{\text{def.}}{\iff}$ X 内に 加法 $x + y$ ($\forall x, \forall y \in X$) およびスカラー倍 αx ($\forall \alpha \in \Phi$, $\forall x \in X$) が定義されており, これら 2 種類の演算に関し次の 7 つの条件が成りたつ.

加法に関して：

(i) (結合法則) $\forall x, \forall y, \forall z \in X,\ \ (x + y) + z = x + (y + z);$

(ii) (交換法則) $\forall x, \forall y \in X,\ x + y = y + x;$

(iii) (単位元の存在) $\exists 0 \in X$ s.t. $x + 0 = 0 + x = x;$

(iv) (逆元の存在) $\forall x \in X$, $\exists(-x) \in X$ s.t. $x + (-x) = (-x) + x = 0.$

スカラー倍に関して：

(v) (分配法則) $\forall \alpha, \forall \beta \in \Phi$, $\forall x, \forall y \in X$,
$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,\ \ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$

(vi) $\forall \alpha, \forall \beta \in \Phi$, $\forall x \in X$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$

(vii) $1x = x$, ただし 1 はスカラーの乗法に関する単位元である.

※$_{\mathbf{1}}$. 線形空間 X の要素 (元) を "ベクトル (vector)" または "点 (point)" と呼ぶ.

定義２．(ノルムの定義)

線形空間 X の各元 $x \in X$ に対し スカラー $\|x\|$ が対応しており, 次の 3 つの条件をすべて満足するとき, $\|\cdot\|$ を X のノルム (norm) という.

(N1) $\forall x \in X$, $\|x\| \geq 0$. 更に, $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(N2) $\forall \alpha \in \Phi$, $\forall x \in X$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

(N3) (三角不等式) $\forall x, \forall y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

※$_{\mathbf{2}}$. ノルムの導入された線形空間 X を "ノルム空間 (normed space)" と呼ぶ.

定義３．(内積の定義)

線形空間 X の各元 $x, y \in X$ に対し スカラー (x, y) が対応しており, 次の４つの条件をすべて満足するとき, $(\cdot, \cdot)$ を X の内積 (inner product) という.

(P1) $\forall x, \forall y, \forall z \in X,\ (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

(P2) $\forall x, \forall y \in X,\ (x, y) = \overline{(y, x)}$.

(P3) $\forall \alpha \in \Phi, \forall x \in X,\ \alpha(x, y) = (\alpha x, y) = (x, \overline{\alpha} y)$.

(P4) $\forall x \in X,\ (x, x) \geq 0$. 更に, $(x, x) = 0 \iff x = 0$

※$_3$. 内積の導入された線形空間 X を "内積空間 (inner product space)" と呼ぶ.

※$_4$. 内積空間 X において, $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ $(\forall x \in X)$ と定めると, この $\|\cdot\|$ は条件 (N1)-(N3) をすべて満たす (X のノルムとなる). 即ち, 内積空間はノルム空間である.

不等式１ (コーシー・シュヴァルツの不等式)

X を複素内積空間とし, X での内積とノルムをそれぞれ $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ と表すとき, 次の不等式が成立する.

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall x, \forall y \in X \tag{1}$$

検証. $(x, y) = 0$ である場合は, 定理は明らかに成立するので, $(x, y) \neq 0$ と仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x + tay\|^2 &= \|x\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}(x, ay) + t^2\|ay\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\left(\overline{a}(x, y)\right) + t^2|a|^2\|y\|^2, \quad \forall a \in \mathbb{C},\ \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで, $a = (x, y)/|(x, y)|$ とすると,

$$|a| = 1, \quad \mathrm{Re}\left(\overline{a}(x, y)\right) = |(x, y)|.$$

したがって, この場合の不等式 (2) は, 次の t に関する 2 次不等式となる.

$$\|y\|^2 t^2 + 2|(x, y)|t + \|x\|^2 \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

(3) が成立するための条件を, 判別式を用いて計算すると:

$$D/4 = |(x, y)|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0.$$

これは, 不等式 (1) と同値である. ■

不等式 2 (シュヴァルツの不等式)

$$a, b \in \mathbb{R},\, \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad |ab| \leq \varepsilon |a|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}|b|^2 \ \left(\text{等号成立条件:}\quad |a| = \frac{1}{2\varepsilon}|b|\right). \tag{4}$$

検証.

$$\left(\varepsilon|a|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}|b|^2\right) - |ab| = \varepsilon|a|^2 - |a||b| + \frac{1}{4\varepsilon}|b|^2 = \varepsilon\left(|a| - \frac{1}{2\varepsilon}|b|\right)^2 \geq 0. \quad \blacksquare$$

不等式 3 (ヤングの不等式)

$$a, b \in \mathbb{R},\ \ 1 < p, q < \infty,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ \left(q = \frac{p}{p-1},\ p = \frac{q}{q-1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad |ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q \ \left(\text{等号成立条件: } |a|^p = |b|^q\right) \tag{5}$$

検証. $a \in \mathbb{R}$ を固定し,

$$f_a(t) := \left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}t^q\right) - |a|t, \quad t \geq 0,$$

とすると,

$$f_a'(t) = t^{q-1} - |a| = t^{\frac{q}{p}} - |a|.$$

よって, $f_a'(t) = 0$ となるのは, $t = |a|^{\frac{p}{q}}$ のときのみであり, このとき:

$$f_a(|a|^{\frac{p}{q}}) = \left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|a|^{q\cdot\frac{p}{q}}\right) - |a| \cdot |a|^{\frac{p}{q}} = |a|^p - |a|^p = 0.$$

以上をもとにして, f_a の $t \geq 0$ での増減を調べると, 次の表のようになる.

t	0	$\cdots$	$\lvert a\rvert^{\frac{p}{q}}$	$\cdots$
$f_a'(t)$	$-\lvert a\rvert$	$-$	0	$+$
$f_a(t)$	$\frac{1}{p}\lvert a\rvert^p$	$\searrow$	0	$\nearrow$

ここで, $t = |b|$ $(b \in \mathbb{R})$ とすれば, 不等式 (5) が成立することが示される. 更に増減表から, 不等式の等号成立条件は $t = |b| = |a|^{\frac{p}{q}}$ となるが, これは式 (5) 中の等号成立条件と同値である. $\blacksquare$