

「数学」とはどのような教科なのか

～ 数学の教員として心がけていること～

白川 健 (SHIRAKAWA, Ken)
千葉大学教育学部数学科教育分野

学校教育学特論Ⅱ 12月20日（水）

URL: kenboich.jp

目標： 教員として、「数学」という教科に対する
イメージ（ビジョン・持論）をつかむ
（そのきっかけ作りになればうれしい）

補足：

- ◎ 正解はない
自分自身が確信できたものが答え
- ◎ 自分自身の、教育に対して「やりたいこと
（持論）」が見えている（ビジョンを持つ）
ことが大事
- ◎ 持論のあり方によって数学の「持ち味」の
引き出し方はさまざま

◆科学の方法（ \approx 数学的活動）

解析したい現象

自然現象、社会現象、工学技術など

モデリング（問題を作る）

数学モデルを作る = 現象・プロセスを数式で表す

双方向

数学解析（問題を解く）

数学モデルを解く
理論・方法の創出

数値実験（発表・議論）

数学モデルや
数学理論の再検証

◆ 手掛かり・足掛かりの例（私なりの提案）

「**数学的活動**」 = 「**科学の方法に沿った活動**」
の図式が素直？

- ◎ 数学は「**科学する**」ための技術として発達してきた側面がある（特に近代以降）
- ◎ 科学の基本項目
 - 知的好奇心（知りたい、解決したい）
 - 自由な発想（決めてかからない）
 - ポジティブな姿勢
 - 目先のことに夢中になれる集中力
- ※. 数学を身近に感じないのは、科学が身近でないということか？（科学の文化が根付いていない？）

◆ 試行の例：卒業研究

伝統的な修業スケジュール

- ・ 大学4年間： 専門領域を見つける
- ・ 修士2年間： 専門領域の理解を深め、知識を自分のものにする
- ・ 博士3年間： 自分の創作力を発揮して新しい発見を論文として発表

※. 伝統的 = 理想的 = 職業人（数学者）向け
= 必ずしも一般の教員向けではない

- 「やりたいことを」彫り起こしたり、創作力を引き出す 活動・経験を優先
- 知識の理解や理論的完成度はある程度後回しでよしとする

◆ 試行の例：卒業研究

2つのコースを用意

[コース1] 伝統的なコース

- ・ 数学の専門書を読み込んで、セミナーで理解度をチェック（学生が発表し、教員と質疑応答する）

※. 教科書あり、計画的な進行が可能

[コース2] 自分でテーマをみつけるコース

- ・ 自分の研究テーマを自分で考える（創作する）
- ・ 知識の修得や理論的完成度よりも、「面白さ」や「矜持」を感じることを優先

⇒ 卒業後も自分独りで活動を継続できる（やる気次第）

※. 教科書も自分で探す、計画性は期待できない

◇ [コース2] 年間スケジュール

3年次スタート（10月あたり）～4年次：

◎ テーマを模索（半年～1年）

- ・ 「テーマ（＝何をしたいか）」がわからないという状況を体験
- ・ 小さなきっかけからテーマを具体化する過程を教員と考える（図書館・ネット検索）

◎ テーマを決定&卒論作成（1年～半年）

- ・ テーマに沿って「数学的活動」を展開
- ・ 「卒業論文」＝「活動の総括記録」
- ・ 達成目標は卒研究生の「目的意識（価値観）」に合わせて設定

※. 例外はたくさんある

◇ 過去の取り組みの例

例 1

サッカーのPK戦を数学で扱いたい

テーマ：数学モデルの創作

- ① プレーヤーの直感
- ② 数学的整合性

「確率」と「1次関数」
(教材化が狙い)

双方向

数学解析（問題を解く）

- ①②の検証
= モデルの妥当性の保障

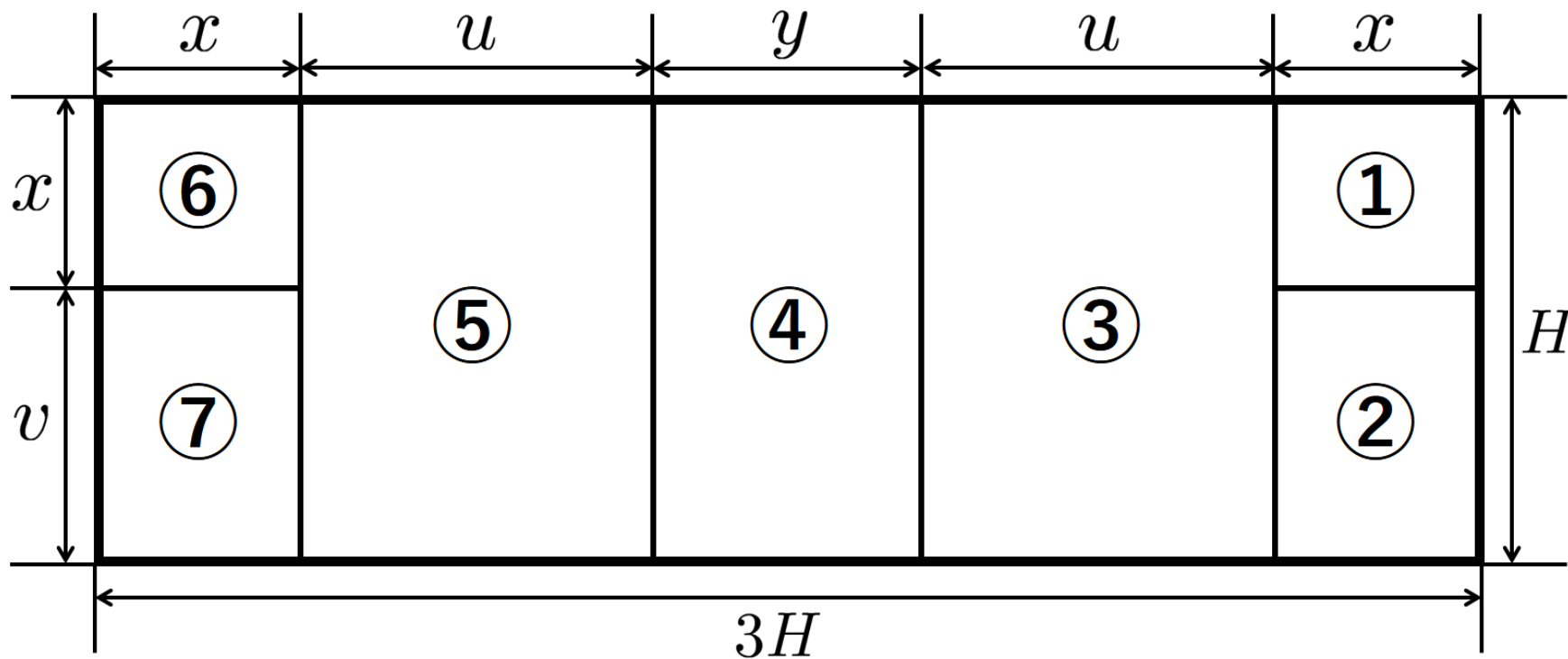
他方面からの再検証

グラフで確認
統計データの収集
(YouTube)

例 1 創造性を実感できた内容

(1) 数学モデルの目標設定

最終版：監督が、キッカーの能力に合わせて、ゴールのどのエリアを狙うべきかを、計算して求める



ゴールのエリア分け ($H=244\text{cm}$)

例 1 創造性を実感できた内容

(2) 数学モデルにおける各種の設定

- ・ 評価関数の設定：P K の成否の期待値（確率・統計）
- ・ ゴール枠の分割方法
- ・ キーパーのディフェンスパターンの確率分布（統計データを自前で用意, cf. You tube）
- ・ P K の成否のパターンの確率分布（統計データ + α ）

(3) キッカーのボールコントロール能力を表す変数を考案 (変数 p)

学生が提案：先生と最後まで意見が対立

$$0 \leq p \leq 1, p=1 \text{ (正確無比)}, p=0 \text{ (ノーコン)}$$

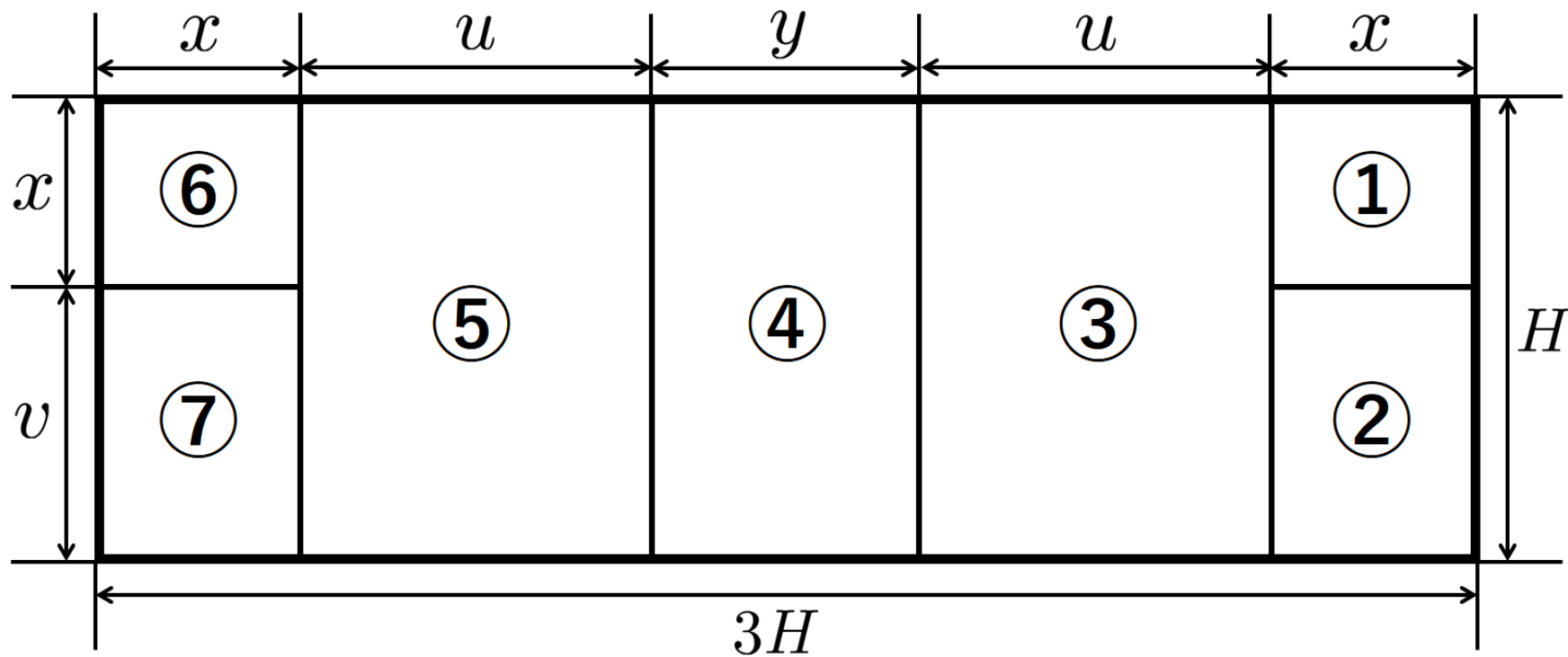
(4) 数学モデルの評価方法の考案

$f_1(p)$: ゴール上スミ (①と⑥) を狙う時の成功期待値

$f_2(p)$: ゴール下スミ (②と⑦) を狙う時の成功期待値

$f_3(p)$: キーパーのワキ (③と⑤) を狙う時の成功期待値

$f_4(p)$: ゴールの真ん中 (④) を狙う時の成功期待値



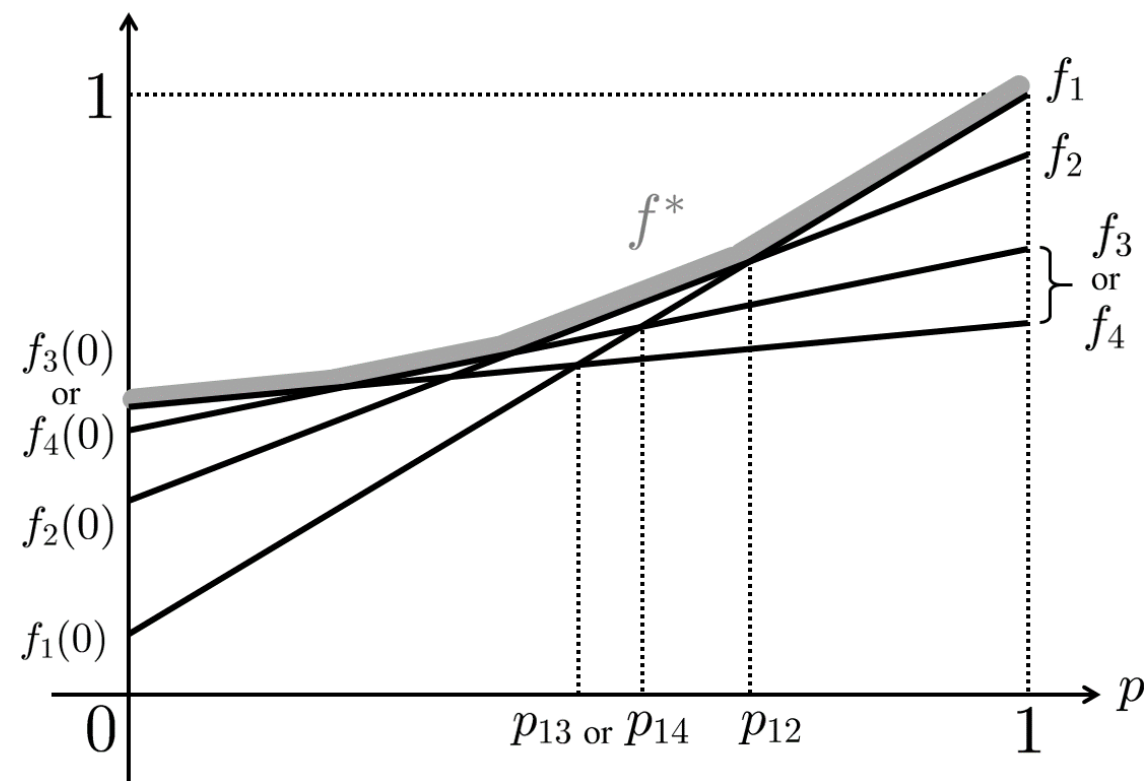
(4) 数学モデルの評価方法の考案

$f_1(p)$: ゴール上スミ (①と⑥) を狙う時の成功期待値

$f_2(p)$: ゴール下スミ (②と⑦) を狙う時の成功期待値

$f_3(p)$: キーパーのワキ (③と⑤) を狙う時の成功期待値

$f_4(p)$: ゴールの真ん中 (④) を狙う時の成功期待値

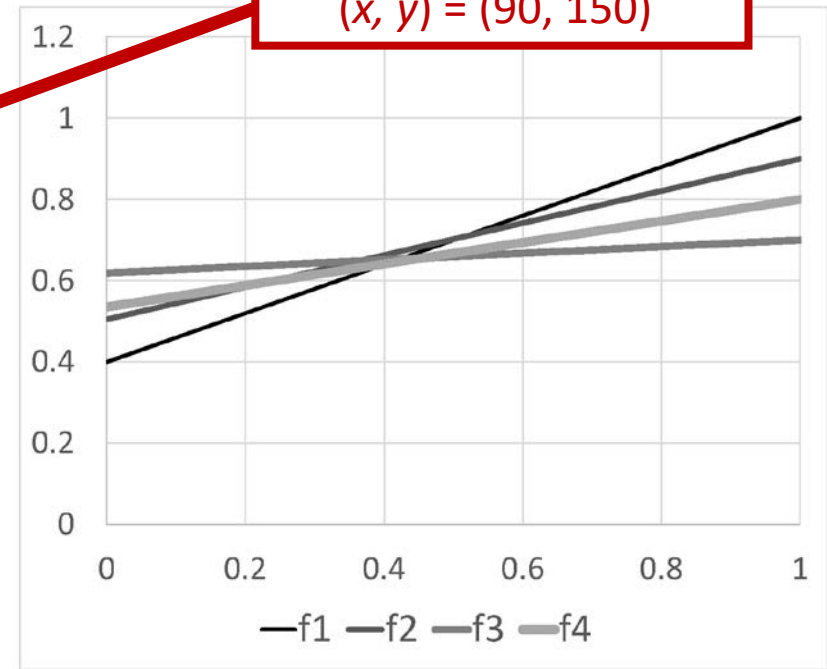
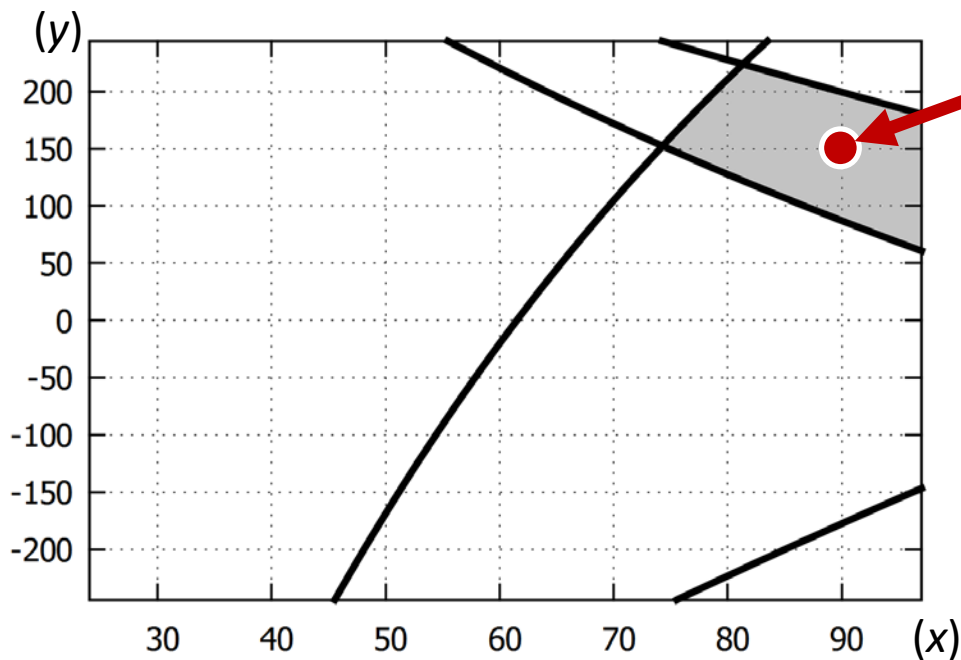


目標プロフィール:

キッカーの能力が高くなるにつれ、段階的に難易度の高いエリアが算出されるような状況

例 1

得られた結論（千葉大学研究紀要臨時号に掲載予定）



※. 目標プロフィールが実現できる (x, y) の領域（左図）と実際の再現状況の例（右図）

感想・今後の展望：

- 初めて学生と対等に意見を戦わせることができた
- 中高生向け教材としてはまだ難しい

例 2

和音（音楽）を数学で扱いたい



数学モデル：[クック・藤沢 等] 関西大学総合情報学部紀要, 25 (2006)

キーワード：①不協和度, ②緊張度, ③モダリティ, ④倍音

テーマ：和音の安定度を3次元ベクトルで表現

双方向

提案方法の妥当性の検証

数値実験データを統計分析
(3和音以上にも対応させる)

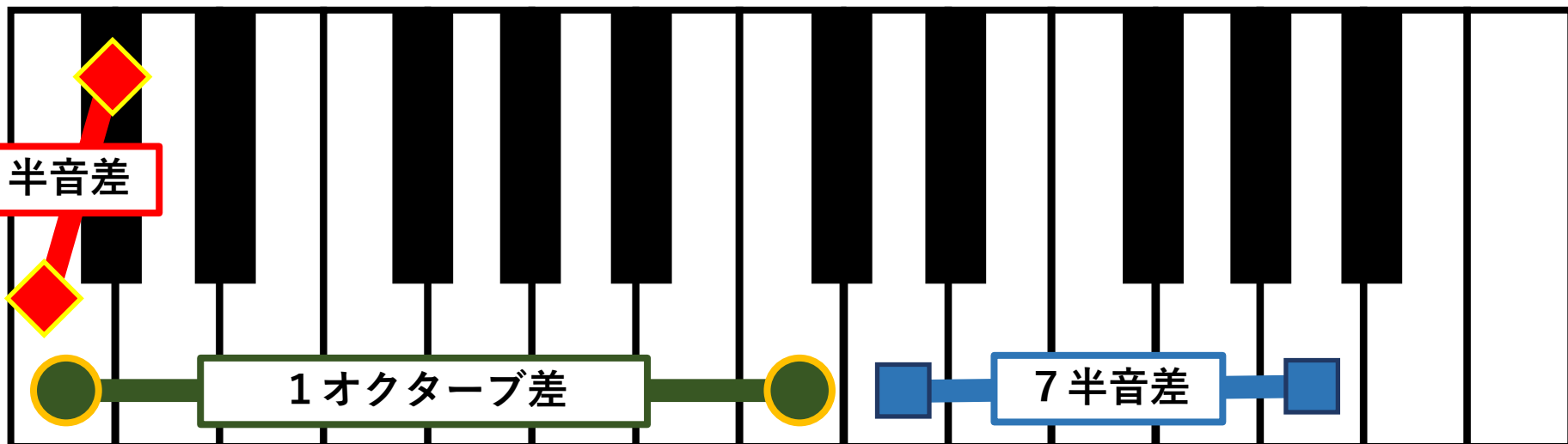
他方面からの再検証

実際の音楽（曲）の
コード進行を3Dグラフィックスで表示

例 2 用語の補足

- ① **不協和度**：2つ音を出すときの「うなり」の度合い
- 「不協和度大」 = 「うなりが大」 = 「不快感度大」
 - 隣り合う鍵盤（半音差）を同時に押すと「うなり」の大きな響きになる（音波の干渉が原因）

不協和度の変数： $d \geq 0$ (discordance)

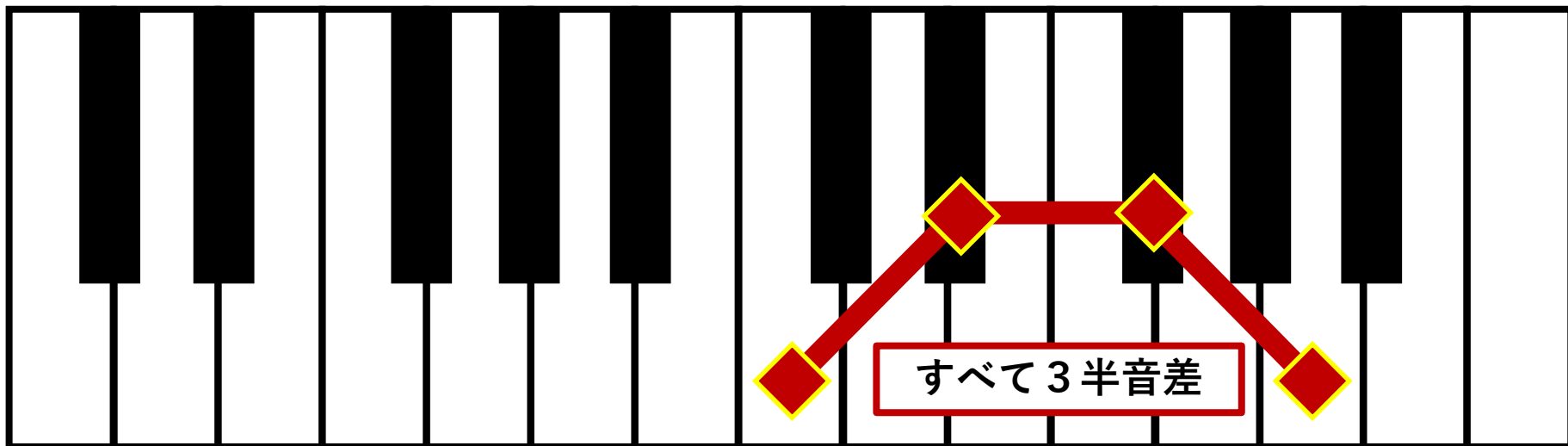


例 2 用語の補足

② **緊張度**：3つ以上の音を出すときの、和音が人に与える「不安な感じ」の度合い

- サスペンスドラマ等で使用すると効果的（？）
- 音程差を等間隔にすると「緊張度」が大きくなる

緊張度の変数： $t \geq 0$ (tension)

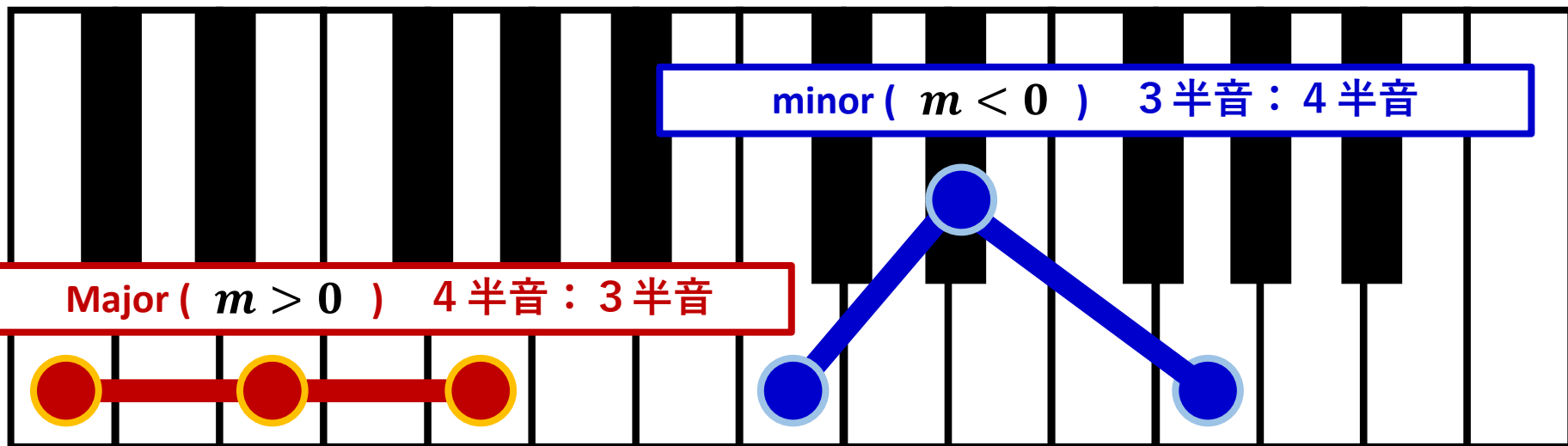


例 2 用語の補足

③ **モダリティ**：3つ以上の音を出すときの、和音が人に与える「明るい／暗い」（Major/minor）の印象の度合い

- 音程差を等間隔にすると「緊張度」が大きくなる

モダリティの変数： m (modality)；＋はMajor，－はminor



例2 用語の補足

④ **倍音**（～の倍音）：ある周波数 f (Hz) の音に対して、 f (Hz) の倍数の周波数に対応する音

例えば ド ($f=261.63\text{Hz}$) の音に対する倍音は
ド ($\approx 2 \times f$), ソ ($\approx 3 \times f$), ド ($\approx 4 \times f$), ミ ($\approx 5 \times f$), e.t.c.

※. 音を発すると、音波が反響・共鳴して、倍音も一緒に発生する

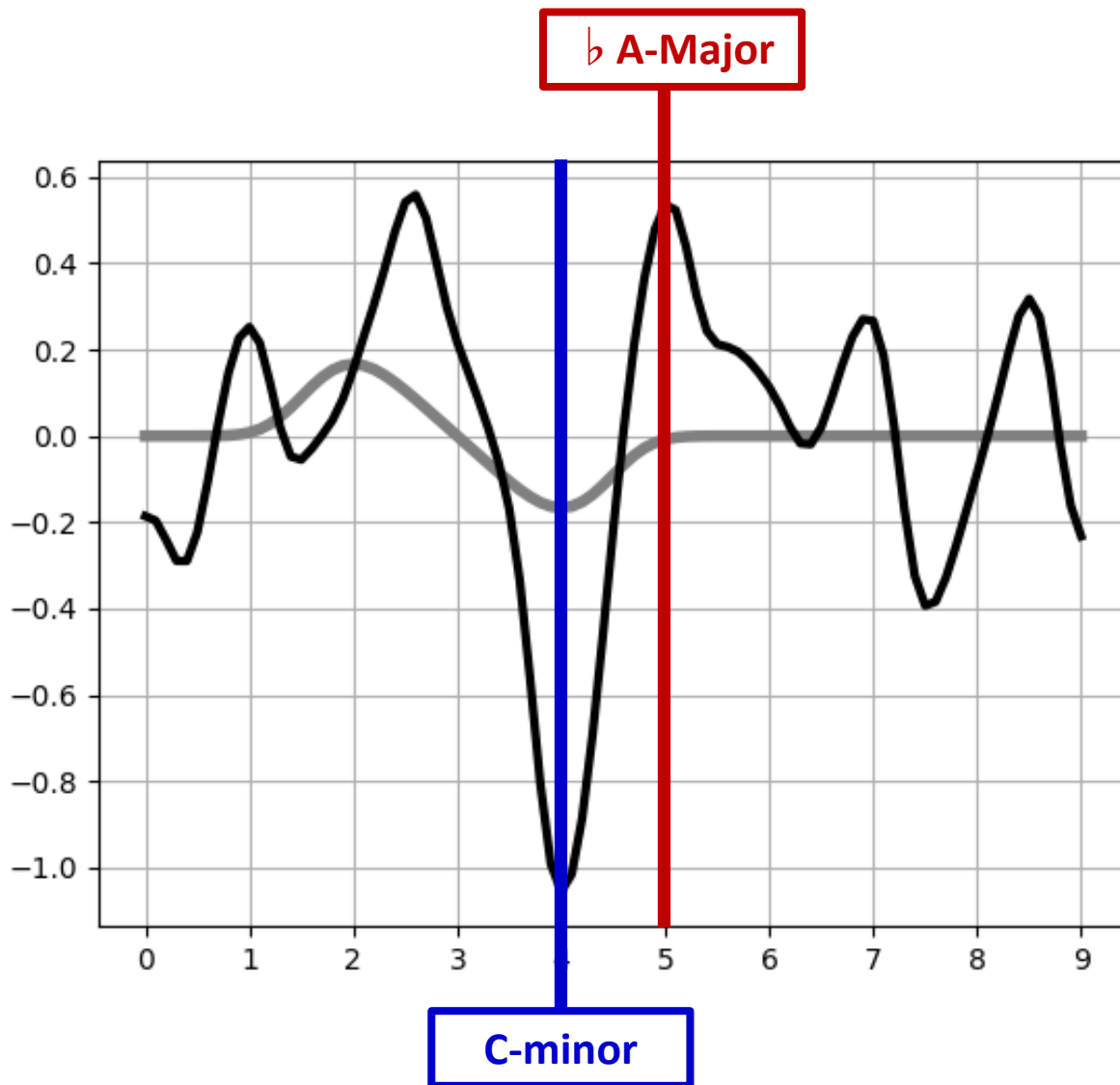
※. 日常生活で倍音を意識する場面は少ない (?)

「クック・藤沢モデル」による考察（一部）

和音の特性を人間の感性と合う形で表現するためには、
倍音は無視できない

例 2

クック・藤沢モデルを用いた追実験



設定：ドと \flat ミは固定で、もう1音加えて3和音を作る

ヨコ軸： \flat ミと最高音との音程差

タテ軸：モダリティ

グラフ：「グレー」は倍音を考慮しない場合、「黒」は考慮する場合

結論：倍音を考慮するモデルの方がMajor/minorの特徴をよくとらえられているという意味で優れている

例2 創造性を実感できた内容（現在進行中）

テーマ：和音の「安定度」を数学的に表現する

先行研究 [クック・藤沢 等] (2006～)

● 不協和度 d :

d が大きい (小さい) \Leftrightarrow 和音は不安定 (安定)

● 緊張度 t :

t が大きい (小さい) \Leftrightarrow 和音は不安定 (安定)

● モダリティ m :

?

(不安定度) = $\bar{d} + ct$ ($c > 0$: 定数, \bar{d} : 不協和度の平均)

※. モダリティの扱いについてはあまり言及がない (?)

例 2 創造性を実感できた内容（現在進行中）

- 目標：**
- ① モダリティを安定度の指標に組み込む
 - ② 数学的な表現を, 人間の直観と照らし合わせても「ピンとくる」形にする

提案 I：

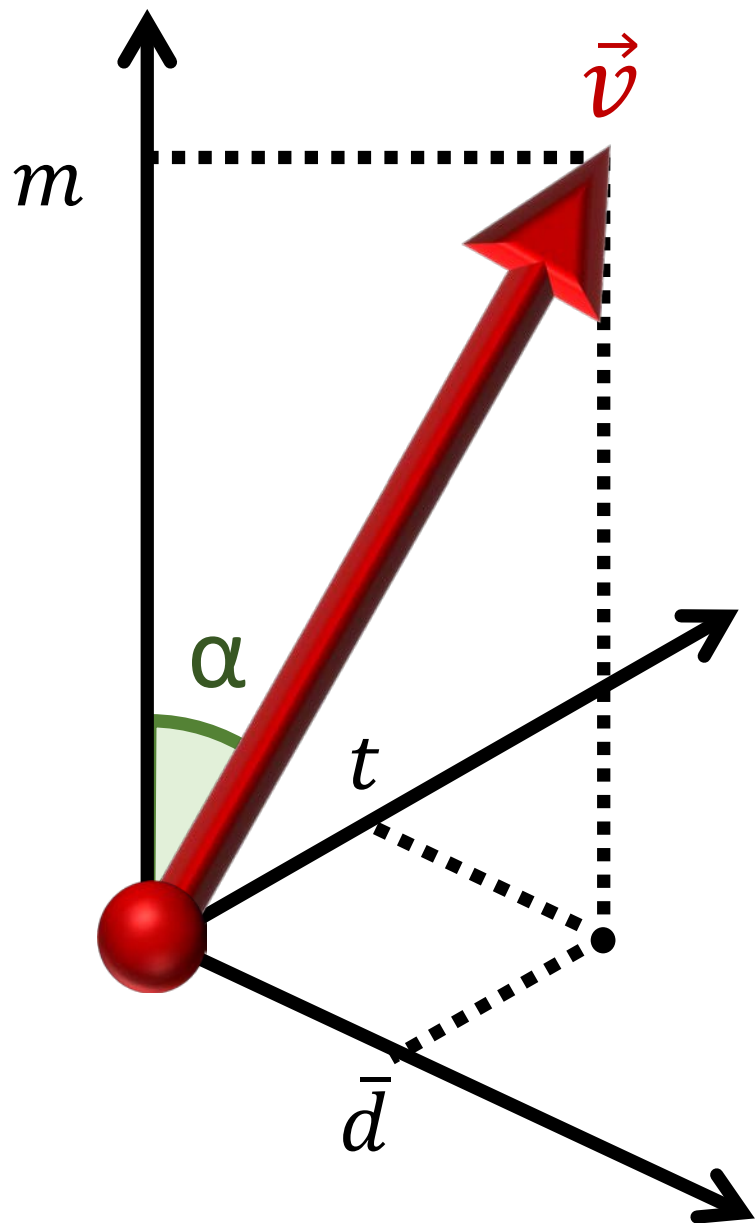
和音の安定度を, 3次元ベクトルを用いて表す

$$\vec{v} = (\bar{d}, t, m)$$

※. 4和音以上の場合, t と m にも平均値を用いる

※. 提案 II もある

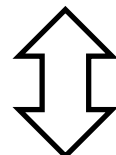
◇ 提案 I のアイデア



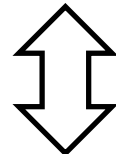
(1) 「ベクトルの方向」と
「人間の立ち姿勢」とを対応付け

\vec{v} と m 軸とのなす角を α とする

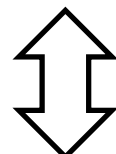
α が大きい (小さい)



傾きが大きい (小さい)

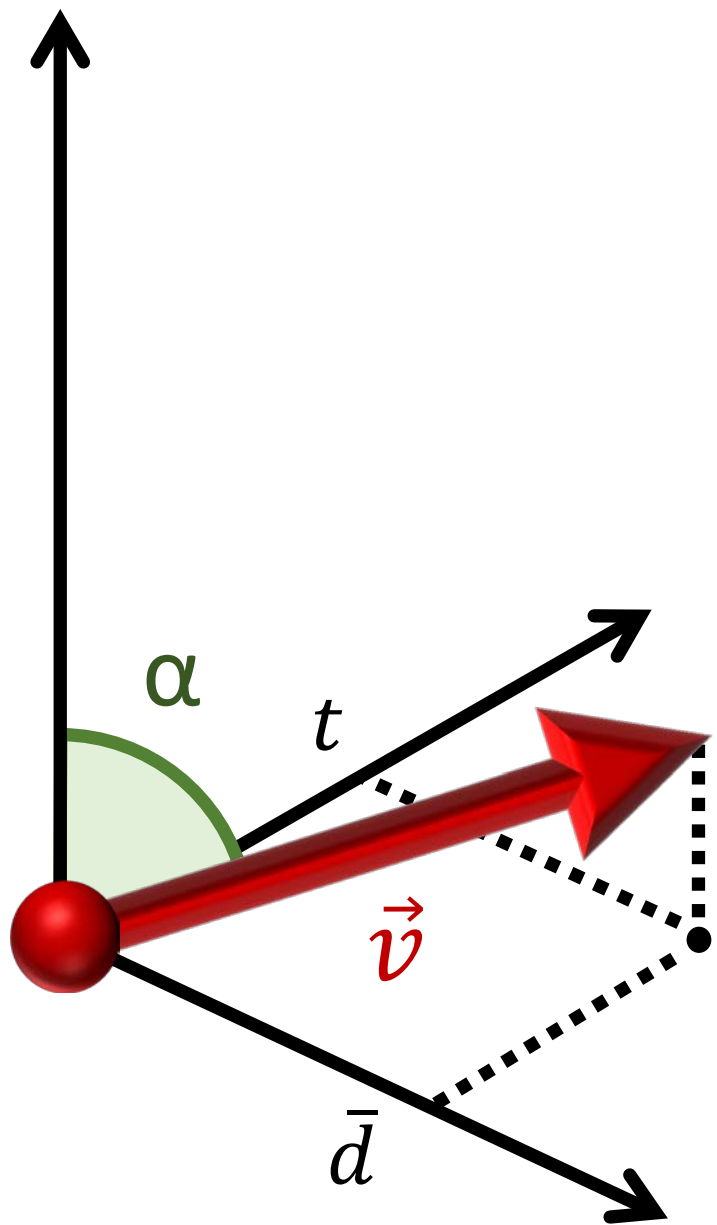


転びやすい (にくい)



不安定 (安定)

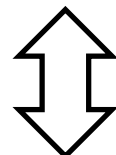
◇ 提案 I のアイデア



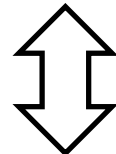
(1) 「ベクトルの方向」と
「人間の立ち姿勢」とを対応付け

\vec{v} と m 軸とのなす角を α とする

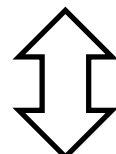
α が大きい (小さい)



傾きが大きい (小さい)

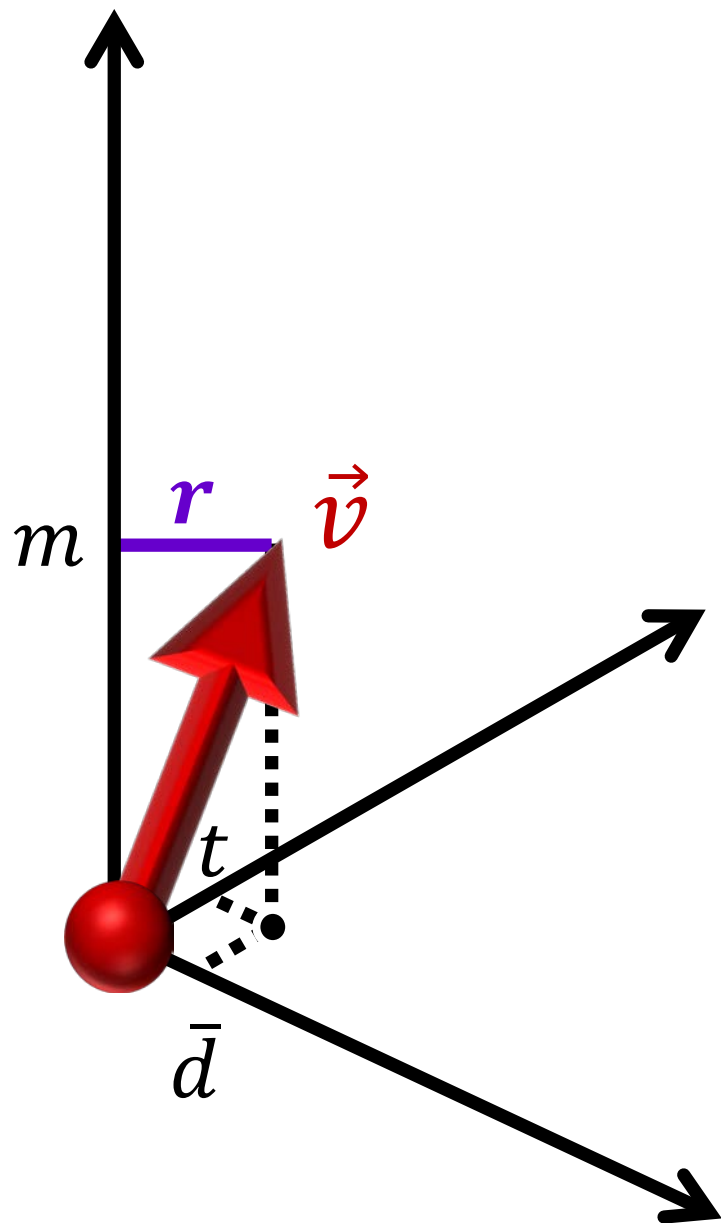


転びやすい (にくい)



不安定 (安定)

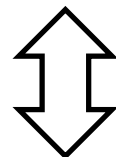
◇ 提案 I のアイデア



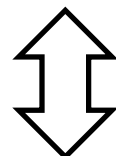
(2) $r = \sqrt{\bar{d}^2 + t^2}$ と先の「不安定度」とを対応付け

モダリティが同じならば

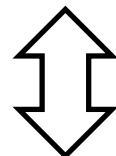
r が大きい (小さい)



傾きが大きい (小さい)

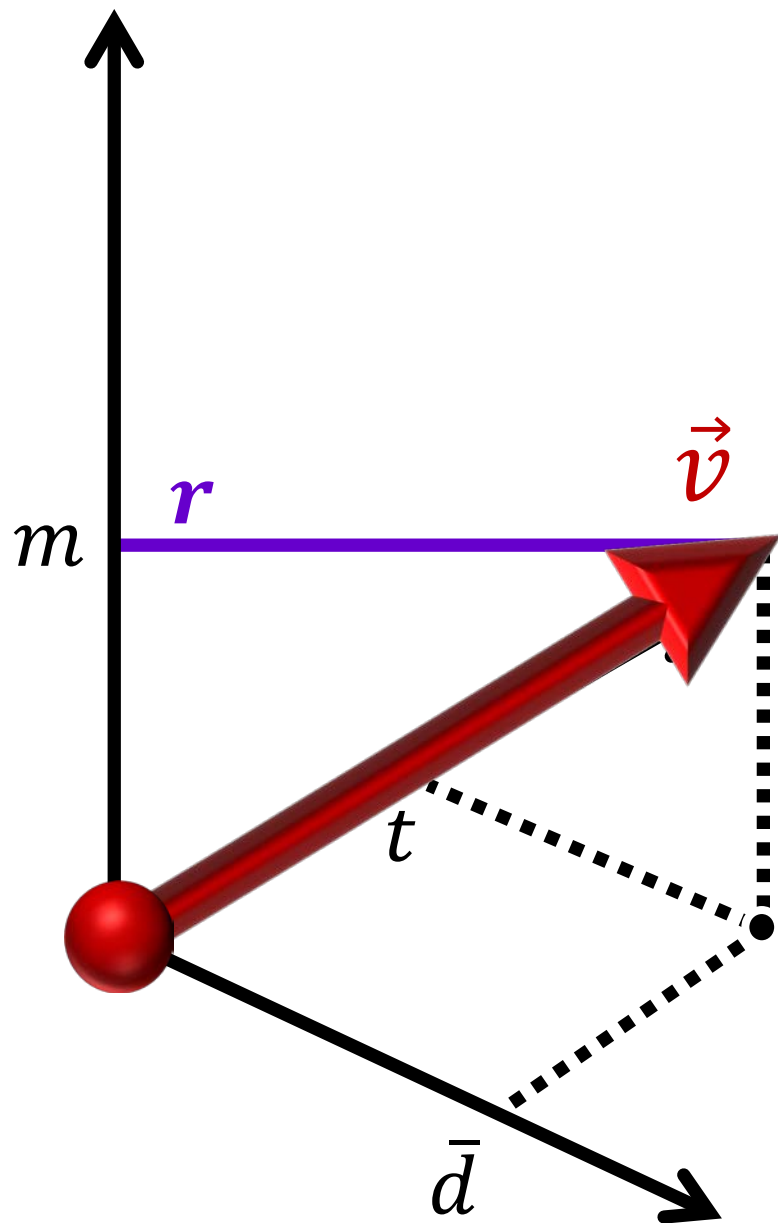


転びやすい (にくい)



不安定 (安定)

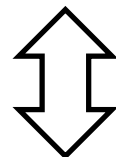
◇ 提案 I のアイデア



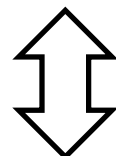
(2) $r = \sqrt{\bar{d}^2 + t^2}$ と先の「不安定度」とを対応付け

モダリティが同じならば

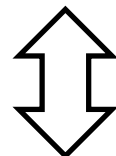
r が大きい (小さい)



傾きが大きい (小さい)

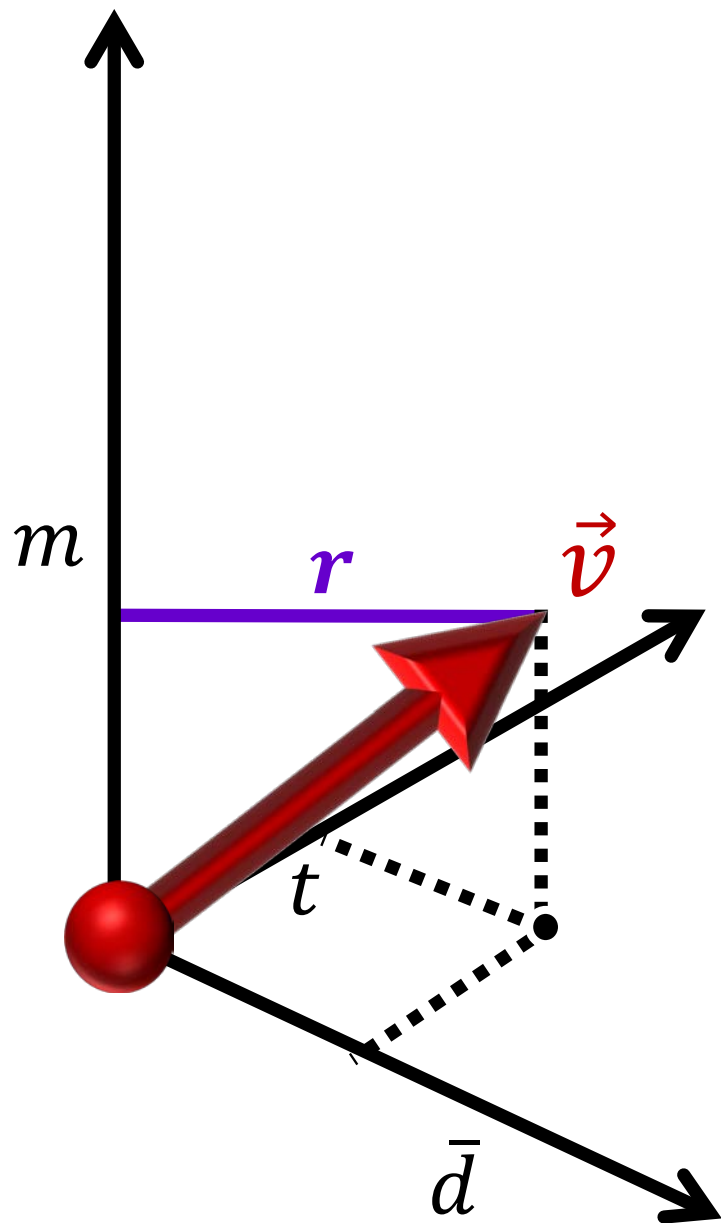


転びやすい (にくい)



不安定 (安定)

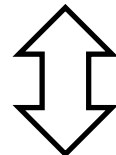
◇ 提案 I のアイデア



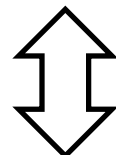
(3) $|m|$ の大小と, 和音の「わかりやすさ」とを対応

r が同じならば

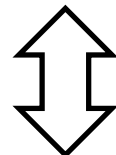
$|m|$ が大きい (小さい)



傾きが小さい (大きい)

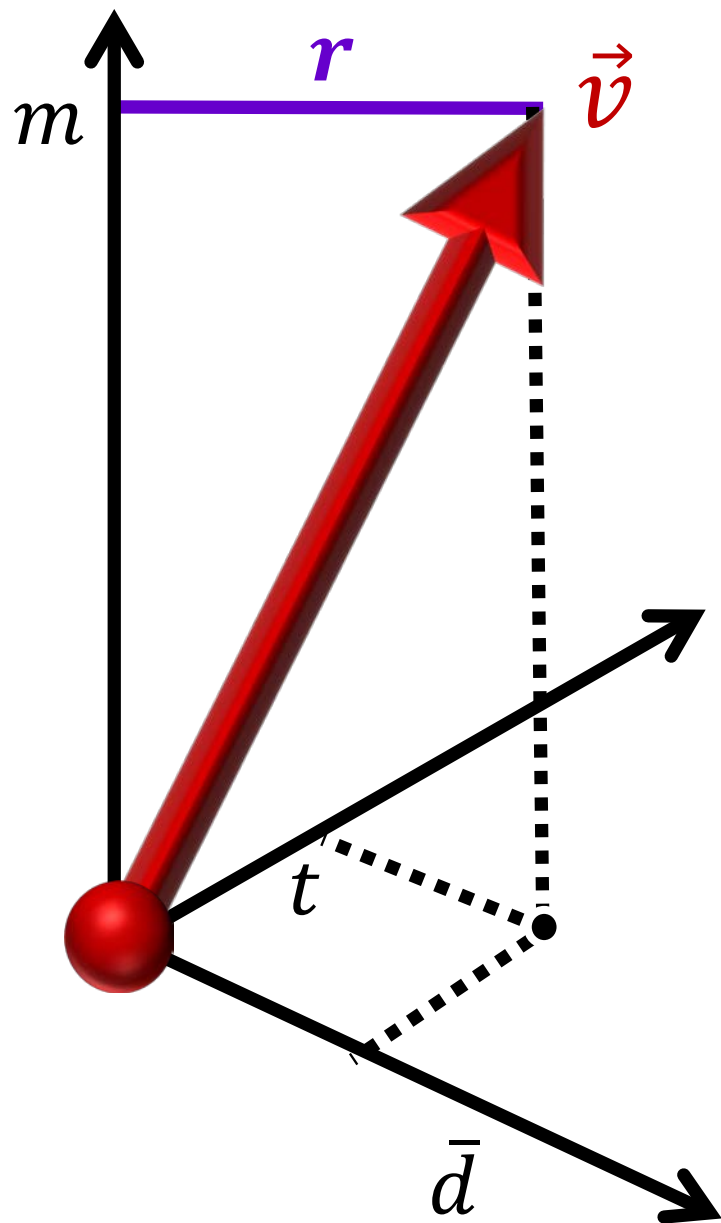


転びにくい (やすい)



安定 (不安定)

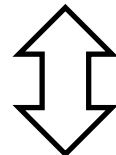
◇ 提案 I のアイデア



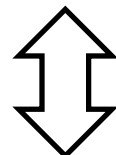
(3) $|m|$ の大小と, 和音の「わかりやすさ」とを対応

r が同じならば

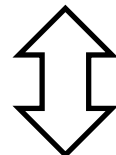
$|m|$ が大きい (小さい)



傾きが小さい (大きい)



転びにくい (やすい)



安定 (不安定)

◇ 現在の見通し（やってみたいこと）

! 同じようなアイデアの報告例はないようだ

!! **和音の安定度 = $\cos \alpha$** とする設定が有望
そうだ

? \vec{v} を用いるアイデアの妥当性は**要検証事項**
統計分析 & C G による可視化, e.t.c.

?? **モダリティ m** の扱いには工夫の余地がある

Major/minorがはっきりしない和音に対しては、
考慮する倍音の数によって値の正負が安定しない

⇒ m に対する何らかの「平均」と「偏差」を
考慮に入れて安定性を再定義（**提案Ⅱ**）

◆ おわりに

◎ 授業で述べたこと

- 数学の教員は「持論」としてやりたいことの「ビジョン」を持つべき（という私見）
- 「数学的活動」＝「科学の方法に沿った活動」という構図は自然ではないか（という私見）
- 「創造的活動」をうまくかみ合わせることができれば、活動は**無条件で楽しくなる**

◎ 「決めてかからない（思い込みは危険）」 vs
「夢中になる素養は大事（思い込みの強さ）」

**不要なものはなく、使い方次第で「善」にも
「悪」にもなる**

◆ おわりに

◎ 「勉強」をする意義

- 見識を深める（引き出しを増やす）
- 直面した困難に対して、どの引き出しを使うと最も有効か、的確に判断できるようになる（必要ならば増強すべき引き出しを自分で見つけ出せる）

◎ 「数学」に関する注意点

- 数学は、物事（状況）を整理・分析することには大変有効
- 分析することと、決断することは別（決断する部分はあまり助けてくれない）