「数学」とはどのような教科なのか

～ 数学の教員として心がけていること ～

白川　健 (SHIRAKAWA, Ken)
千葉大学教育学部数学科教育分野

学校教育学特論Ⅱ 12月13日（水）

URL: kenboich.jp

目標：教員として、「数学」という教科に対するイメージ（ビジョン・持論）をつかむ（そのきっかけ作りになればうれしい）

補足：

◎ 正解はない
自分自身が確信できたものが答え

◎ 自分自身の、教育に対して「やりたいこと（持論）」が見えている（ビジョンを持つ）ことが大事

◎ 持論のあり方によって数学の「持ち味」の引き出し方はさまざま

数学の授業では：

◎ 数式の意味や問題の解法を、限られた時間の中で受講生へ伝達する。

参考資料：教科書､学習指導要領等

◎ 概念・理論の背景・応用について、何らかのビジョンを示すことができるとなおよい。

参考資料：教育実習の精錬授業（附属中）, インターネット, e.t.c.

◎ 数学の持つ側面の多様性（懐の深さ）に触れておくと、単元の導入等で「小話」として挟むことも可能？

参考資料：数学者の伝記（歴史）など

◆ 工夫の例（大学の講義）

[科目名] 小学校算数
（T4-T5・月３・学部1年生対象）

[内容] 記号論理学
高校・数Ⅰ数Ａ「集合と論理」の延長

[例年の山場]
・記号に馴染む
$\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, \in, \subset, \cap, \cup$, e.t.c....
・関数の「全射性」「単射性」の概念の理解

[例年の対応]
講義の合間にプリントを配布して演習活動
演習問題・解答のWeb配布

◆ 工夫の例（大学の講義）

[例年の悩み]

・新しい概念に馴染めていない、「意味不明」という反応をひしひしと肌で感じる

・人数が多く（100名超）演習を行っても手が回りきらない

[今年度の対応]

・概念の背景や応用をよく話してから（必要ならば一部を創作して）本題に入る

・数学を応用するには、高校までの知識範囲では不十分（世界が狭すぎる）であることを示唆

⇒ 広い世界を例示して、本当に面白いことはこの先の内容にあることを伝えたい

◆ 工夫の例（大学の講義）

写像：
対応関係全般

関数：
数同士の対応関係

暗号への応用：
文字同士の対応関係

暗号は元に戻せることが大事
（逆対応、逆関数）

全射・単射は逆対応が作れるための必要十分条件

[今年度の反応] やらないよりもよかった

前年よりも少しだけ進歩できた（ε（イプシロン）だけ）

◆ 他の例（大学の講義）

[よくありそうな質問]

数学にはなぜ、馴染みのない記号が多いのか？

$$\log,\ \forall,\ \exists,\ \int f(x)dx,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \text{e.t.c.}$$

[解答例] 数学者（科学者）の特質によるもの

・合理性を好む：最小の手間（出来れば式１つ）で多くのことを説明したい（出来れば森羅万象すべて）

・基本的に「面倒くさがりや」である

※. 「創作」する内容の是非は、自分の「持論」を信じて決める（創作していることは隠さない）

◆ 現時点での感触（大学教員として）

「数学」＝「訓練」“must”
「数学が出来る」＝「頭がよい」

の図式が色濃い

よく耳にする言葉：

◎ 数学の有用性、数学を身近に感じさせる

（役に立つであろうことは知っているが、具体的にイメージできない）

◎ 数学の面白さ

（基本的に明日の見えない修行だと思われている）

◎ 「自分には素質がないので無理です」
「難しいことをなさっているんですね。。。」

（縁がないと思われがち）

◆ 考えられる要因・背景

◎ 試験を乗り切るだけのために数学をしている

自ら望んでいない

◎ 数学のスタッフ（教授陣）が、数学の「広報」に熱心でない（なかった）

努力は続けているが、まだ十分ではない

◎ 概念や理論を理解する段階で止まっている

習ったことを基に、**創意工夫**して、新しいものを**創造した経験**がない

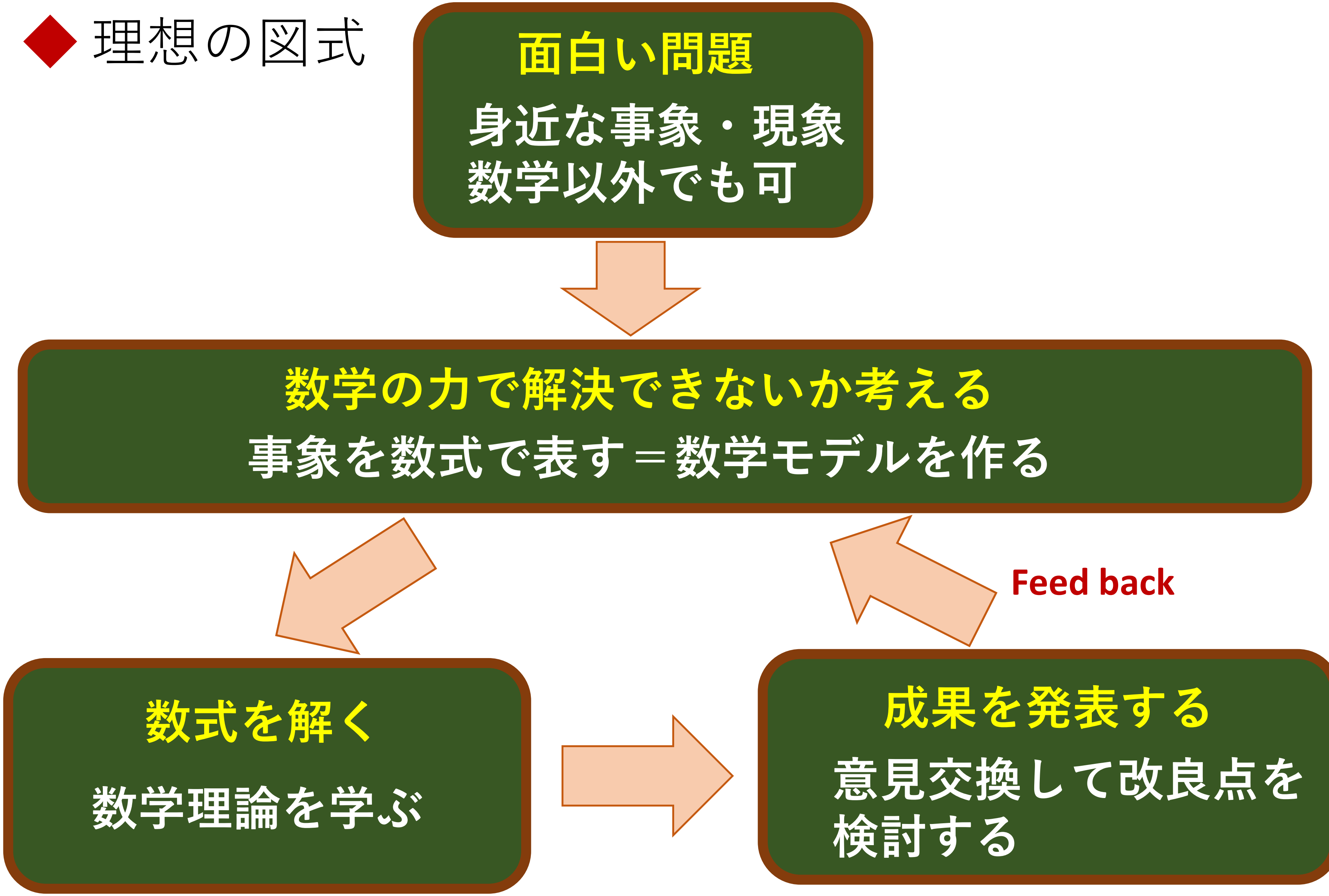
◎ 理論が発達して、分野が細分化している

- 「位相幾何学」と「微分幾何学」の専門家が出会っても、全く話が合わない
- 「全体像」をつかむまでの道のりが長い（修業期間が長い）

伝統的な修業スケジュール

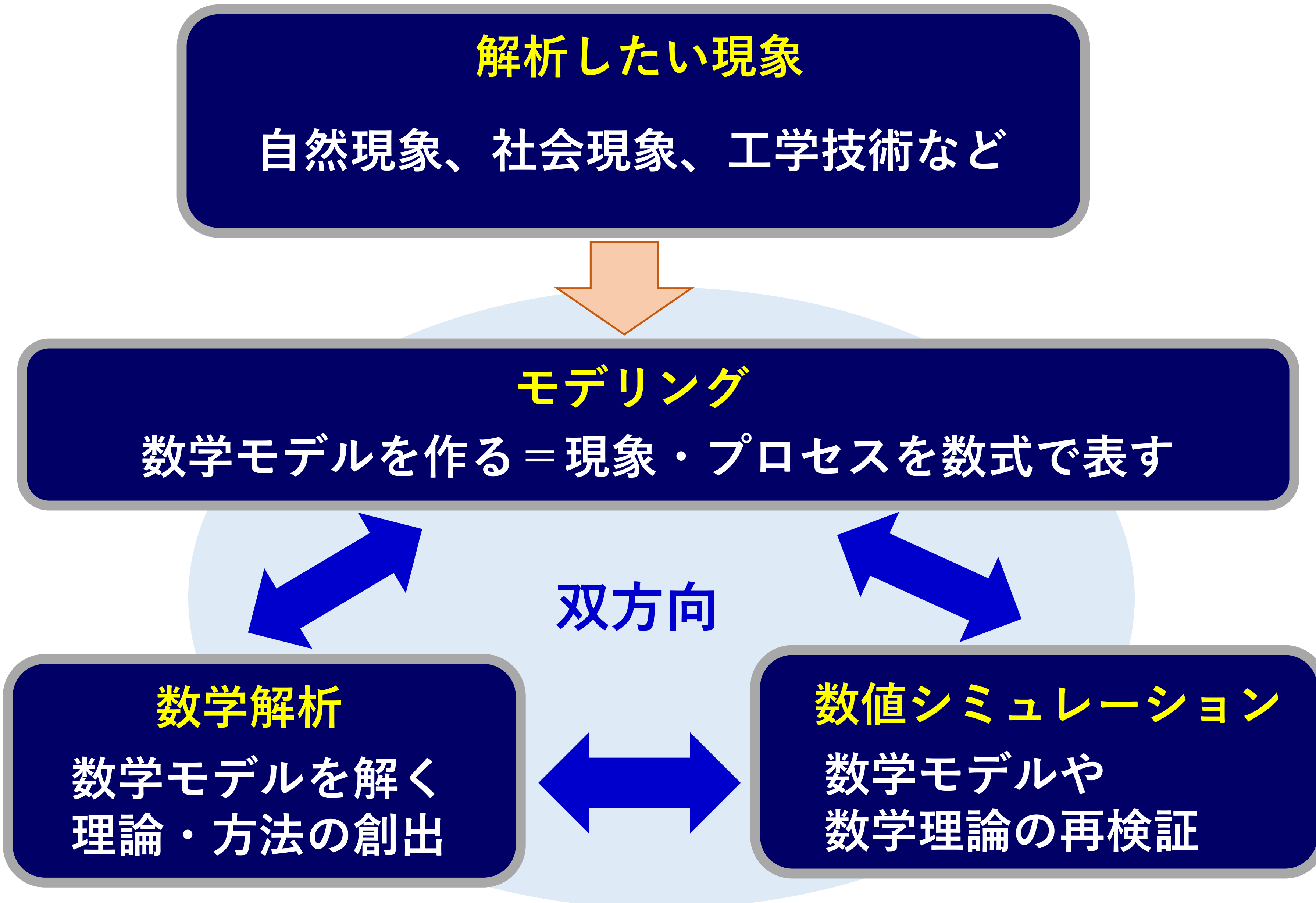
・大学4年間：　専門領域を見つける
・修士2年間：　専門領域の理解を深め、知識を自分のものにする
・博士3年間：　自分の創作力を発揮して新しい発見を論文として発表

◆ 理想の図式



※. これは「科学の方法」そのものである

◆ 科学の方法


解析したい現象
自然現象、社会現象、工学技術など
モデリング
数学モデルを作る＝現象・プロセスを数式で表す
双方向
数学解析
数学モデルを解く
理論・方法の創出
数値シミュレーション
数学モデルや
数学理論の再検証

◆ 手掛かり・足掛かりの例（私なりの提案）

「数学的活動」＝「科学の方法に沿った活動」
の図式が素直？

◎ 数学は**「科学する」**ための技術として発達してきた側面がある（特に近代以降）

◎ 科学の基本項目

- 知的好奇心（知りたい、解決したい）
- 自由な発想（決めてかからない）

ポジティブな例：「やってみないとわからない」
「お手本を超えてもっと改良してみよう」

ネガティブな例：「やっても時間のムダ」
「お手本を変えるなんてとんでもない」

◎ 科学の基本項目（つづき）

● ポジティブな姿勢

・失敗しても凹まない　「こういうこともあるさ」
・正しく反省できる
「失敗は失敗で記録に取っておこう」

● 目先のことに夢中になれる集中力
（＝阿呆になれる素養は必要）

対極的な状況：
「先のことを前もって見通し、段取りよく事を運ぶ」
（頭のよさ＝要領のよさ）

※. 数学を身近に感じないのは、科学が身近でないということか？（科学の文化が根付いていない？）

◆ 試行の例：歴史に触れる

目的・意義：

（１）理論が生まれるまでのプロセスに触れる（どうしてそうする必要があったのか）

（２）成功例・失敗例に触れることで、科学する（＝数学する）上でのあるべき姿勢（＝心得）を学ぶ

（３）具体的な人物像に触れることで、科学（＝数学）を身近なものとして捉えやすくなる（のでは？）

（４）数学は科学文化の一部（基礎言語）という意識が自然と身につく（のでは？）

[実験例]・千葉市未来の科学者育成プログラム
・千葉大学次世代能力スキルアッププログラム
・高校等での出張授業

[題目] アルキメデス　～発想力と創造力～

[内容] 図形の重心とその応用

① 重心に関する体験活動
（厚紙から図形を切り出して実験）

② 重心の理論の説明
（アルキメデス独自の考え方・アイデアを紹介）

③ 発展的な話題
（立体の体積計算、円周率πの数値計算）

※. 中学校の知識範囲内だが、天才の発想についていくのはたいへんそうであった

[授業の流れ] 全3時間 (13:00—16:00)

1．導入（30分）
アルキメデスの人物紹介 ・ 重心の概要

2．演習（30分）＋休憩（10分） 期間指導

3．講義：重心の基礎（30分） 推論と証明

4．演習（30分）＋休憩（10分） 理論の応用

5．講義：アルキメデスの方法（30分）
天秤の独特の使い方・体積計算への応用

6．まとめ（10分） 受講生へのメッセージ

◇ アルキメデス以外の題材

- ● ニュートン・ライプニッツ：　微分積分学
- ● オイラー・ラグランジュ：　変分学
- ● 関 孝和 (せき たかかず)：　和算
- ● 伊能 忠敬 (いのう ただたか)：　測量・天文学

◆ 試行の例：「双対性」をキーワードにする

双対性とは：
互いに対になっている2つの対象の間の関係

※. ニュアンス：「表」「裏」の見立てが可能な関係

※. 双対性の威力：「表」が難解でも「裏」の状況をみることで、問題が簡単に解ける

※. 双対性：数学（科学）の概念として多く登場

[双対性の登場例]

・幾何学：図形の双対性（結晶構造の表現に利用）

・記号論理学：
「ＡまたはＢ」の双対は「ＡかつＢ」
「ＡかつＢ」の双対は「ＡまたはＢ」
「全肯定」の双対は「全否定」

・応用数学：
最適な状況を効率的に求める方法として活用

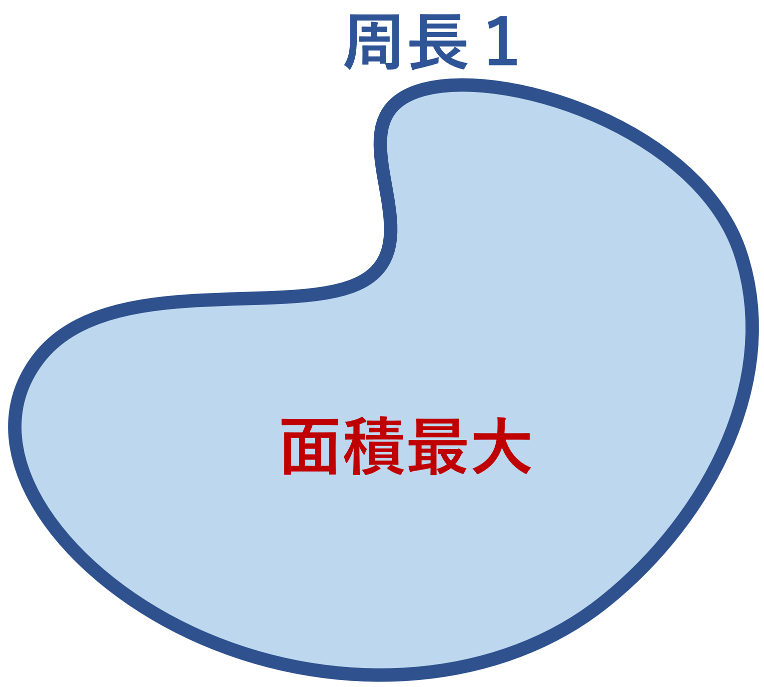
・物理：
「電気」と「磁気」は双対

[例題１] 等周問題

(P) 等周問題：

周長が１の閉曲線の中で、囲む領域の**面積を最大**とするのは、どのような図形か

答え：円周



※. (P) は簡単だが、（Q）は難しい

※. (P) と (Q) は問題として互いに双対なので、(P)の解がわかれば、それは (Q) の解にもなる

※. 3次元で考えると、(Q) によって「シャボン玉が丸くなる」という現象を科学的に説明できる

[例題 1] 等周問題

(Q) 双対の問題：

面積が 1 の閉曲線の中で、**周長を最小**とするのは、どのような図形か

答え：円周

※. (P) は簡単だが、（Q）は難しい

※. (P) と (Q) は問題として互いに双対なので、(P)の解がわかれば、それは (Q) の解にもなる

※. 3次元で考えると、 (Q) によって「シャボン玉が丸くなる」という現象を科学的に説明できる

[例題２] 対偶の活用（双対と類似の例題）

「ＰならばＱ」の対偶は「ＰでないならばＱでない」
（対偶と元の命題の真偽は一致する）

問： a, b, c は整数とする。このとき以下を証明せよ

$a^2 + b^2 = c^2$ ならば a, b, c のどれか一つは偶数である

証明： 命題の対偶を考える。

対偶

a, b, c がすべて奇数ならば $a^2 + b^2 \neq c^2$ である

※. この例題の場合、対偶を示すことは簡単

a, b, c がすべて奇数であると仮定すると

$$a^2 \quad ＝（奇数）×（奇数）＝（奇数）$$

同様に b^2 も奇数であるので

$$a^2 + b^2 \quad ＝（奇数）＋（奇数）＝（偶数）\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

これに対して

$$c^2 \quad ＝（奇数）×（奇数）＝（奇数）\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

①, ②により

$$a^2 + b^2 \neq c^2$$

である（完）

◆ 来週の予定

◎ 過去の卒業研究、修士論文研究のなかから、

「数学的活動」＝「科学的活動」

の実践例を紹介する予定

◎ できれば、今最もホットなものを紹介したいが。。。

・進捗状況による

・数式の活用例なども、少々詳しく紹介したい